LECTIONES Geometricæ;

In quibus (præsertim)

GENERALIA *Curvarum Linearum* SYMPTOMATA

DECLARANTUR.

Auctore ISAACO BARROW Collegii SS. *Trinitatis* in Acad. *Cantab.* Socio, & *Societatis Regiæ* Sodale.

Οἱ φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ μαθήματα, ὡς ἔπος εἰπεῖν, ὀξεῶς φαίνονται· οἵτε βραδεῖς, ἂν ὑπ' τούτῳ παιδευθῶσι καὶ γυμνάσωνται, κἂν μηδὲν ἄλλο ὠφεληθῶσιν, ὅμως εἴσω τὸ ὀξύτεροι αὐτοὶ αὑτῶν γίγνεσθαι πάντες ὁμολογήσουσιν. Plato de Repub. VII.

LONDINI,

Typis *Gulielmi Godbid*, & prostant venales apud *Johannem Dunmore*, & *Octavianum Pulleyn* Juniorem.

M. DC. LXX.

Benevolo Lectori.

Lectionibus his (quas jam quodammodò posthumas accipis) septem, unâ sepositâ, postremas Opticis *illis, quæ nuper editæ prostant, Comitis & quasi Mantissas destinâram; aliàs, opinor, de proferendis in apricum ejusmodi quisquiliis nihil cogitaturus. Sed cum nihilominùs è re sua fore censeret* Librarius *ab istis divulsas has seorsum comparere; quin & ad comparandum huic Opellæ speciem aliquam (ut ea nempe* rejectanei Schediasmatis *molem transcenderet) aliud quidpiam suppeditari cuperet; ejus (haud gravatìm non dixero) votis obsecundans, adjeci Lectiones priores quinque; subsequentibus illis materiâ agnatas, & quasi cohærentes; quas scilicet ante aliquot annos*

ut

ut nullo animo evulgandi, ità procul ab ea cura conceperam, quæ talem animum deceret; Enimverò craſsiùs & ἐπιπολαιότερον ſcriptæ ſunt, neque firmè quicquam continent, extra Tyronum, *quibus accommodatæ ſunt, uſum, captúmve jacens. quapropter harum rerum peritos obteſtor, ut ab iis prorſus abſtineant oculos, vel ut veniam ſaltem paullò liberaliùs indulgeant. alteras quas dixi ſeptem conſpectui tuo lubentiùs expono, nonnulla ſperans in illis haberi, quæ nec eruditiores piguerit inſpicere. Ultimam* amicus *(vir ſanè cum primis probus, aſt in hujuſmodi negotiis* Flagitator improbus *) extorſit, aut certè, pro jure quod meritò obtinet ſuo, exegit. Cæterùm quid tractent, & quorſum tendant, facilè ſingularum initia delibans edoceberis; ut non ſit cur te longiùs morer aut detineam.* Vale.

Lectio I.

NOvum jam ingredior dicendi campum, amæniorem sanè nescio vel feraciorem, uberrimâ varietate confertum, eóque delectabilem; & quia primas fermè *Mathematicarum hypotheſium origines* recludit (è quibus nempe *magnitudinum cùm definitiones efformantur; tum proprietates emergunt*) necessariò perquam utilem. De magnitudinum intelligo generatione, seu de modis, quibus ortæ productæve concipiantur variæ magnitudinum species. Nec ulla certè magnitudo datur, quæ non innumeris modis & intelligi producta possit, & reverà produci. Possunt autem, qui saltem hactenus usurpati sunt, ad præcipua quædam genera referri, quorum se mihi jam cogitanti suggerentia sunt hæc; *per motus locales; per interſectiones magnitudinum; per quantitate poſitioneque determinatas ab aſſignatis locis diſtantias; per ductus magnitudinum in magnitudines; & per applicationes magnitudinum ad magnitudines; per aggregationem magnitudinum ordine certo diſpoſitarum; per appoſitionem magnitudinum ad alias, vel ſubductionem ab aliis; per organicam demùm* (ab horum quocunque deductam, aut ordinatam) *effectionem*. Horum, & si qui sunt aliorum modus primarius, & quem alii cuncti quodammodo supponant oportet, utpote sine quo nil procreari potest, est iste, *qui per motum localem*. De quo proinde primo disputiendum. De motu celebratur illud *Aristotelis* effatum, ἀναγκαῖον ἀγνοουμένης ἀνάγκης (κινήσεως) ἀγνοεῖσθαι καὶ τὴν φύσιν: ignorato motu necessariò naturam ignorari; in Physicis ideò paginam utramque facit; nec immeritò, cùm in natura (saltem quantùm humanus intellectus assequi valet, aut experientia commonstrare) quicquid fiat, à motu fiat, aut certè non absque motu. De natura motûs igitur, & rectâ definitione; de causis, de differentiis complura subtiliter argutantur Physici, quorum ferè *Mathematicis nihil cordi*

3 *Phyſ. I.*

vel curæ. Sufficere poteſt his quæ communis ſenſus agnoſcit, & obvia comprobant experimenta pro conceſſis arripere; hoc imprimis generale, Quamvis magnitudinem (magnitudinibus etiam punctum accenſebo ceu minimum magnum, ut & infinitum ceu maximum magnum, quibus mediæ interjacent magnitudines omnes finitæ) mobilem eſſe, hoc eſt eo quo conſpicimus indies fieri modo locum ſuum & ſitum poſſe demutare, juxta differentias præſtitutas, motu nempe vel directo, vel circulari; æquabiliter veloce, vel utcunque magis accelerato, vel magis retardato. Hujuſmodi dico motuum quemvis pro lubitu ſuo tanquam evidenter poſſibilem aſſumunt, ut quid exinde conſequatur inveſtigent & oſtendant. De iis igitur differentiis motuum quotæ ſint & quales diſſeremus. In motu potiſſimum à *Mathematicis* conſiderantur *ipſe modus lationis*, *& quantitas vis motivæ*. ipſe modus primò lationis, juxta quem motus, alii progreſſivi ſunt, alii circumlatitii, alii compoſiti ex his; tum vis motivæ quantitas, propter quam alter alterius reſpectu velocior, tardior, æquè velox; aut in ſe æquabilis, acceleratus, retardatus affirmatur. Ex his manant fontibus differentiæ motuum; quorum de poſteriore nos primùm agemus, quia nonnulla continet ἐξωπεικὰ quæ velim quam primum ablegata, quo reliqua poſtmodùm expeditiùs fluant & limpidiùs. & quia vis motivæ quantitas ſine tempore dignoſci nequit, de temporis natura perſtringendum eſt aliquid. Tempus autem dic ſodes, quid eſt? illud *Auguſtini* tritiſſimum noſtis; ſi nemo quærat ſcio, ſi quis interroget neſcio. Verùm quia *Mathematici* crebrò tempus adhibent, quid eo deſignetur vocabulo diſtinctè concipiant oportet; agyrtæ ſecùs futuri. quare jure reſponſum exigatis; ac ſtatim pareo, ſed breviter ac ſimpliciter, & quantùm potero λαθολογήματα defugiens. Abſtractè loquendo, tempus eſt perſeverantia rei cujuſque in ſuo eſſe. Alias verò res aliis diutiùs in eſſe ſuo permanere; fuiſſe cùm hæ non erant, eſſe cum hæ non ſunt; priùs incepiſſe, ſeriùs deſinere; neque non aliquas cum aliis unà oriri ac occidere, ſimultaneóq; quaſi durationis progreſſu, à carceribus ad metas, univerſum ætatis curriculum emetiri, nemini non perſpectum eſt. Ergò tempus abſolutè quantum eſt; ut quantitatis admittens (modo ſuo) præcipuas affectiones æqualitatem, inæqualitatem, proportionem; nec enim diffiteatur quiſquam, opinor, ἰσόχρονα fore, quæ ſimul exoriuntur & ſimul intereunt; inæqualiter durâſſe, quorum unum fuit antequam alterum cæperit eſſe, nec non eſſe perſeverat, poſtquam alterum deſiêrit exiſtere. Longius autem, & brevius tempus nemo non dicere ſolet, nemo non concipere videtur. Quantitatis igitur particeps eſſe tempus communis ſenſus agnoſcit,

pro

pro modo permanentiæ rerum in ſuo eſſe. At enim dices: ante res omnes conditas annon tempus fuit? extra mundum, ubi nihil manet, annon tempus labitur? reſpondeo, ſicut ante conditum mundum fuit ſpatium, & extra mundum nunc eſt & quidem infinitum cui Deus coëxiſtit) quatenus potuerunt olim, & poſſunt jam exiſtere talia tantáque corpora, quæ tum non fuerunt, aut jam non ſunt; ità priùs mundo, & ſimul cum mundo (licèt extra mundum) tempus fuit, & eſt, quatenus ante mundum exortum potuerunt aliquæ res in eſſe tamdiu permanere, poſſint jam extra mundum talis permanentiæ capaces res exiſtere; potuit *Sol* multo priùs in lucem emerſiſſe; poſſit jam ille, vel alius talis ſpatiis imaginariis affulgere. Tempus igitur non actualem exiſtentiam, at capacitatem tantum ſeu poſſibilitatem denotat permanentis exiſtentiæ; ſicut ſpatium capacitatem deſignat magnitudinis intercedentis. Sed mirum, ingeres, ſecluſo motu tempus explicari; annon tempus motum implicat? Minimé dico quoad abſolutam, & intrinſecam naturam ſuam; haud magìs quàm quietem; à neutro temporis quantitas in ſe dependet; ſeu currant res, ſeu ſtent; ſeu dormiamus nos, ſive vigilemus æquo tenore tempus labitur. Finge ſtellas omnes ab incunabulis ſuis fixas perſtitiſſe; nihil indè quicquam tempori deceſſiſſet; tamdiu quies iſta perdurâſſet, quamdiu motus hic effluxit. Prius, poſterius, ſimul (quoad ortus rerum & interitus) etiam in illo tranquillo ſtatu fuiſſet in ſe, potuiſſet à mente magìs perfecta apprehendi. Sed prout ipſæ magnitudines ſunt abſolutè quantæ, independenter ab omni menſuræ reſpectu, etſi nos ipſarum quantitates niſi menſuras applicando percipere nequeamus; ità per ſe tempus quantum eſt, etſi quo temporis quantitas a nobis dignoſcatur, advocandum ſit motûs ſubſidium, ceu menſuræ quâ temporum quantitates æſtimemus, & inter ſe conferamus; adeóque tempus ut menſurabile motum connotat, nec enim, ſi res omnes immotæ perſtarent, ullo pacto quantum effluxiſſet temporis poſſemus internoſcere; rerum ætas indiſcreta nobis, & imperceptibilis cederet. Temporis fluxum non perciperemus dico? Imo nec aliud quippiam, at ſtupore continuo defixi ceu ſtipites conſiſteremus aut ſaxa. Nihil enim animadvertimus niſi quatenus aliqua mutatio ſenſum afficiens nos interpellat, aut interna mentis operatio noſtram conſcientiam laceſſit, ac excitat. Ex motûs forinſecùs impellentis, aut intra nos tumultuantis extenſione, vel intenſione diverſos rerum gradus & quantitates æſtimamus. Ità motûs quantitas, in quantum a nobis obſervari poteſt, à motûs extenſione dependet;

Nec per se quenquam tempus sentire fatendum est
Semotum ab rerum motu placidáque quiete;

Haud malè dixit *Lucretius*. & *Philosophus ipse*; Ὅταν γὰρ ἀθροὶ μηδὲν
Phys. IV. 16. μεταβάλλωμεν τὴν διάνοιαν, ἢ λάθωμεν μεταβάλλοντες, οὐ δοκεῖ ἡμῖν γεγονέναι
χρόνος. Rectè quidem hoc, non videtur nobis, non apparet à somno excitatis quantum temporis intercessit; at non hinc rectè colligitur, Φανερὸν ὅτι οὐκ ἔστιν ἄνευ κινήσεως καὶ μεταβολῆς ὁ χρόνος. Non persentiscimus, ergò non est, illatio fallax, & fallax somnus, qui fecit ut nos duo semota temporis instantia connecteremus. interim verissimum illud; ὅσῃ ἡ κίνησις, τοσοῦτος καὶ ὁ χρόνος ἀεὶ δοκεῖ γεγονέναι, quantus nempe motus fuit, tantum tempus videtur extitisse; neque quum tantum tempus dicimus, aliud consuevimus intelligere, quàm tantum motum intercedere potuisse, cujus scilicet extensioni continuò successivæ rerum permanentiam imaginamur coëxtendi. Cæterùm quia tempus alveo semper æquali, non per vices nunc segniùs, tunc rapidiùs præterlabi concipimus (admissâ siquidem illâ disparitate nullam omninò computationem, aut dimensionem admitteret) non ideò motus omnis æquè determinandæ dignoscendæque temporis quantitati censeatur accommodatus, at is præsertim qui summè simplex & uniformis æquabili semper tenore progreditur; mobili parem ubique vim retinente, pérque medium uniforme delato. Quare tempori determinando tale quiddam mobile deligendum est, quod saltem quoad motûs sui periodos æqualem constanter impetum servat; & per æquale spatium decurrit. Et ad communem quidem usum accipiendus est ejusmodi motus præcipuè notabilis, in promptu cunctis obvius, & sensus omnium incurrens, qualis est motus syderum, imprimis *Solis & Lunæ*, mirificè sibi per omnia constans, & orbi terrarum conspicuus; qui proinde nedum communi gentis humanæ suffragio deputatus, at divino Creatoris consilio aptus natus est huic usui; à quo nempe pronunciatum legimus: *Fiant luminaria in firmamento Cæli,*
Gen. 1. 14. *& dividant diem ac noctem, & sint in signa, & tempora, & dies, & annos.* At quomodò, dices, cognoscetur *æquabili solem motu ferri, & unum puta diem, aut annum alteri penitus exæquari, vel æqui temporaneum esse?* Respondeo non aliter hoc (excipiendo quòd à divino testimonio colligatur) nobis innotescere, quàm cum aliis æqualibus motibus ipsum solis motum contendendo. Si nempe deprehendatur solis motus in horologio solari (quod spatiorum à sole in circulis æquatori parallelis percursorum penè certò ac exquisitè quantitates indicat)

indicat) cùm organi cujuſvis horodeictici, ſatis accuratè conſtructi, motibus conſentire. Talis enim machina è fabrica ſua comparata eſt, ſecundum motûs ſui repetitiones ſuccedaneas, æqualiter moveri; *Clepſydram* puta dimetiendæ diei, vel horæ deſtinatam; & quoniam in hac aqua, vel arena quoad quantitatem ſuam, & figuram, vimque deſcendendi prorſus eadem manet, nec non vaſculum continens, & meatus ipſam tranſmittens haud omnino variantur, tantillo ſaltem tempore, perque temperiem aëris conſimilem, nec ideò cauſa ſubeſt ulla, cur non æquales in ſingulis effluxibus motus obire concedatur; ergo ſi compertum ſit, Solares motus, ſeu quoad integras periodos, ſeu quoad partes ipſarum proportionales, organi talis repetitis motibus exquiſitè congruere, meritò pronunciandum eſt, eos prorſus æquabiles, & uniformes fore. Ex quo diſcurſu liquere videtur, id quod fortè non nemini mirum videatur, cæleſtia corpora non eſſe, ex parte rei propriéque loquendo, primarias & originales temporis menſuras; aſt illos potiùs motus, qui prope nos ſenſibus obverſantur, & experimentis ſubjacent noſtris, cùm horum ope cæleſtium motuum regularitatem dijudicemus. Nè quidem ipſe Sol temporis idoneus judex, aut teſtis *αὐτόματος* eſt, nili quatenus horariæ machinæ ſuffragio veracitatem ſuam adteſtatur. Nec ſanè, quod obiter interpono, poteſt ullo pacto ſciri num periodi ſyderum ante multa ſecula tranſcurſæ noſtri ſeculi revolutionibus omnino pares fuerint; nemo ſcilicet aſſerat certò *Methuſelam* illum qui tantùm non mille vitæ tranſegit annos, eo fuiſſe reverà *μακροβιώτερον*, qui jam ante centum annos fato cedit. Quid enim, ſi Sol tum junior, eóque vegetior decuplo citiùs periodos ſuas evolverat? Quid ſi tum aër purior, & indè corporum gravitas validior effecerat, ut vel ipſa organa mechanica citatiòres acciperent motus, adeóque cum noſtri temporis inſtrumentis comparata fidem ſuam fallerent? *Empedocles* quidem, apud *Plutarchum*, exiſtimâſſe dicitur Solem initio dies longè prolixiores effeciſſe. Sed minùs id rationi conſentaneum videtur, quia tales motus vertiginoſi ſenſim elangueſcere potiùs ſolent, quàm invaleſcere. Verum obiter hæc, & vix ſeriò; revertamur in orbitam. Temporis (ſeu permanentiæ rerum in ſuo eſſe, ſtatu, motúve) quantitas, ut dictum eſt, à motu quolibet dignoſcitur, bene notorio, æquabili, (ſeu quoad partes ad hoc adhibitas ſibi conſtanter æquali ac ſimili) dein ſecundariò è quibuſvis aliis motibus, qui cum illo comparati proportione correſpondent, è cæleſtibus imprimis, Solis potiſſimùm ac Lunæ. Adeò ut æqualia tempora ſint, in quibus eadem clepſydra ſemel ac iterum, vel æquè multis viſibus exhauritur; aut in quibus

eadem

eadem ſydera periodos eaſdem, aut ejuſdem periodi partes æquales abſolvunt; inæqualia verò juxta quamcunque proportionem, in quibus ſimiliter, ſeu proportionaliter inæquales periodi conſumuntur. Neque quiſquam objiciat tempus communiter haberi pro menſura motûs, & conſequenter ad hoc motûs differentias (velocioris, tardioris, accelerati, retardati) adſumendo tempus ut præcognitum definiri; nec ideò temporis quantitatem è motu, ſed motûs quantitatem à tempore determinari; nil enim obſtat quo minùs tempus & motus hæc ſibi mutuò præſtent officia. Sanè veluti ſpatium ex aliqua primùm magnitudine metimur, & quantum ſit diſcimus, è ſpatio poſteà reliquas ei congruas magnitudines æſtimanus; ità tempus primò taxamus è motu quodam, poſteà motus reliquos ex eo dijudicamus; quod planè nihil eſt aliud quàm mediante tempore motus alios cum aliis comparare; ſicut & mediante ſpatio magnitudinum inter ſe rationes inveſtigamus. Qui nimirum è temporum proportione motuum colligit proportionem, nil aliud quàm ex organorum horologicorum, vel ex Solarium motuum ſimul decurſorum proportione dictam elicit motuum rationem. Quod certè vidit, & exertè docuit *Ariſtoteles*: ὁ μόνον (inquit) πῶ κίνησιν τῷ χρόνῳ μετροῦμεν, ἀλλὰ καὶ τῇ κινήσει ὁ χρόνον διὰ τὸ ὁρίζειν ἀπ' ἀλλήλων. Porrò, quia tempus, ut oſtenſum, eſt quantum uniformiter extenſum, cujus omnes partes æquabilis motûs partibus reſpectivis, ſeu ſpatiorum æquabili motu peractorum partibus proportione reſpondent, poſſit id quàm optimè per magnitudinem quamlibet ὁμοιομερῆ repræſentari, hoc eſt menti noſtræ ſeu phantaſiæ proponi; per ſimpliciſſimas præſertim, quales ſunt linea recta, & circularis; quibuſcum etiam & tempore ſimilitudines & analogiæ non paucæ intercedunt. Præterquam enim quòd tempus partes habet omnino ſimilares, rationi conſentaneum eſt ipſum velut unicâ dimenſione præditum quantum conſiderare; ipſum enim velut ex ſimplici ſupervenientium momentorum additamento, vel ex unius momenti quaſi continuo fluxu conſtitutum imaginamur, & ſolam proinde longitudinem ei ſolemus attribuere; nec ejus quantitatem alias quàm ex lineæ decurſæ longitudine determinamus. Sicut, inquam, linea puncti promoti cenſetur veſtigium, à puncto habens quòd aliquatenus diviſibilis ſit, à motu verò quòd uno modo, ſecundum longitudinem, dividi poſſit; ità tempus velut inſtantis continuò labentis veſtigium concipiatur, ab inſtante nonnullam indiviſibilitatem habens, à ſucceſſivo fluxu quòd eatenus diſpertiri queat. Et ſicuti lineæ quantitas ab unica longitudine pendet motum conſequente, ità temporis quantitas ab unica conſectatur velut in longum

Phyſ. IV. 18.

expor-

exporrecta ſucceſſione; quam ſpatii decurſi longitudo demonſtrat, ac determinat. Tempus itaque per rectam lineam ſemper deſignabimus; arbitrariè quidem initio ſumptam & expoſitam, at cujus partes proportionalibus temporis partibus, & puncta temporis inſtantibus reſpectivis juſtè reſpondebunt, & iis appoſitè repræſentandis inſervient. His de tempore prælibatis ad conſiderandam vim motûs effectivam procedimus, quæ ſanè (quæcunque ſit ejus natura, vel undicunque procedat, nam iſta *Phyſicis* diſquirenda relinquimus) merito quoque ſeu quantum quid concipitur, & ſicut alia quanta computo ſubjicitur. Etenim experientiâ compertiſſimum eſt, ſæpe duorum mobilium ab eodem termino per eandem orbitam delatorum alterum alteri prævertere, ſeu majus eodem tempore ſpatium conficere. Nec aliunde poteſt hoc procedere, quàm à majori vi, ſeu potentia motiva, quâ præcellit alterum mobile, cujúque gratiâ velocius dicitur. Et quia perſpicuum eſt nil impedire, quin ſecundum omnimodas proportiones contingat hic ſpatiorum unà peractorum exceſſus, ideò vis hæc jure concipiatur in partes quaſlibet (quas & ſicuti partes cujuſcunque qualitatis intenſivas ſuccinctæ diſtinctionis ergò gradus appellare licet, & conſuetum eſt) in partes, inquam, quaſlibet infinitas, aut indefinitas diviſibilis concipiatur; quas inter ſe nectens, & à ſe dirimens communis terminus, vel (juxta ſuppoſitionem quòd quanta conſtant ex infinitis atomis) pars abſolutè minima dicatur quies, hoc eſt ſumma tarditas, aut infima velocitas; è cujus ſuccreſcentiâ, vel intenſione continua velocitatis gradus quilibet eo modo concipiatur aggregari, vel produci, quo linea è punctorum appoſitione, vel motu, tempus ex inſtantium ſucceſſione vel fluxu progenitum imaginamur. Unde rem abſolutè conſiderando, quo vis hujuſce quantitas menti ſeu phantaſiæ rectè proponatur, ſufficit ejus vice magnitudinem quamvis regularem exhibere (hoc eſt talem, in cujus partibus quamvis differentiam, quamlibétque proportionem clarè promptéque valeamus apprehendere) ſimplicitatis adeò perſpicuitatiſque causâ cuilibet ejus repræſentando gradui recta linea cum primis accuratè quadrat. Ità quidem in ſe generatim & abſoluta ſpectata vis iſta tempus non implicat, eóque ſecluſo concipi poteſt (in quolibet enim temporis inſtanti, pérque quodcunque temporis intervallum eâ præditum mobile concipiatur) at quatenus computabilis, ac æſtimio Mathematico ſubdita, quâ ratione velocitas dicitur, cum ſpatio tempus adſignificat; è quibus nempe quantitas ejus dijudicatur, ac diſcernitur definitur idcircò velocitas potentia, quâ mobile ſpatium aliquod in aliquo tempore pertranſire poteſt. Unde conſectatur ſingularem

gularem velocitatis cujuſpiam quantitatem nec ex ſola confecti ſpatii, nec ex abſumpti temporis quantitate dignoſci poſſe (qualibet enim velocitas aliquo tempore quodvis aſſignatum ſpatium emetiatur) aſt ex ſpatii ſimul ac temporis quantitatibus ad calculum redactis eam innoteſcere; ſicut & viciſſim temporis abſumpti quantitas non niſi ſpatii ſimul ac velocitatis agnitis quantitatibus determinetur. Quinimo ſpatii quoque quantitas (quatenus hoc modo per motum dignoſcibilis eſt) nec è ſola definitæ velocitatis quantitate, nec ab aſſignato tanto tempore dependet, aſt ab utriuſque ratione conjuncta. Et quidem ut hæc quomodo ſe reſpiciant ampliùs exponamus, ſpatii quatenus hoc modo computatur quantitas eo ferè dignoſcitur modo, quo è dimenſionibus ſuis quanta ſit ſuperficies innoteſcit; è quantitate ſcilicet unius lineæ, (quæ longitudinem ejus aut altitudinem oſtentat) & è quantitatibus ſingularum invicem ſibi parallelarum linearum, quæ per iſtius lineæ puncta quæque tranſeuntes ſuperficiem totam quodammodo conſtituunt, & componunt; eam ſaltem limitant atque determinant; hoc eſt quaſi per ductum ſingularum ejuſmodi linearum in reſpectiva dictæ lineæ puncta. Velocitatis autem, & temporis quantitates pariter eo modo diſcernuntur, quo ex ſuperficiei, & unius cui applicatur dimenſionis quantitate diſcernitur quanta ſit reliqua dimenſio (ubivis, inquam, aut ſaltem alicubi quanta, nam fieri poteſt ut reliqua dimenſio quatenus per omnia prioris dimenſionis puncta diffunditur, ſibi paſſim diſpar & difformis ſit; quid velim è veſtigio conſtabit, nam utilis hæc conſideratio poſtulat enucleatiùs declarari. Omni temporis inſtanti, ſeu indefinitè parvæ temporis particulæ (inſtanti dico, vel indefinitæ particulæ, nam utì nihil admodum refert, utrùm lineam ex innumeris punctis, an ex indefinitè parvis lineolis compoſitam intelligamus, ità perinde eſt, utrùm tempus ex inſtantibus, an ex innumeris minutis tempuſculis conflatum ſupponamus; nos ſaltem brevitati conſulentes pro temporibus quantumlibet exiguis inſtantia, hoc eſt pro tempuſcula repræſentantibus lineolis puncta non verebimur uſurpare) cuilibet dico temporis momento comperit velocitatis aliquis gradus, quem mobile tunc habere concipiendum eſt, cui gradui reſpondet aliqua decurſi ſpatii longitudo (nam hic mobile tanquam punctum, & ſpatium proinde tantummodò ceu longum conſideramus) quia verò temporis momenta quoad rem ipſam neutiquam à ſe dependent, ſupponi poterit in proximo inſtanti mobile gradum velocitatis alium (alium inquam vel æqualem priori, vel in quavis proportione diverſum) admittere, cui proinde reſpondebit alia ſpatii longitudo, tali proportione reſpiciens priorem, quali velo-

velocitatis hic gradus præcedentem. Quum enim temporis instantia prorsus æqualia sint inter se, spatialium longitudinum ratio à sola velocitatem ratione dependebit, eique proinde par erit, aut similis (quod nisi pro verissimo sumatur, haud ullo modo mensurari possit velocitas; nam à sola spatiorum eodem tempore decursorum (vel eodem instanti) proportione velocitatum inter se collatarum immediatè vel mediatè ratio taxatur, & altera alterius respectu denominatur tanta) similiter si per omnia temporis cujusvis momenta qui conveniunt ipsis velocitatis gradus assignentur, aggregabitur ex iis quantum quiddam, cujus partibus quibusvis decursorum spatiorum partes respectivæ, hoc est iisdem temporibus respondentes particulæ, justè proportionantur, adeóque quantum è gradibus istis constans repræsentans magnitudo spatium quoque decursum repræsentare possit; quatenus nempe qualem spatii partes temporibus singulis peractæ proportionem inter se servant, exactè referat. Quum igitur, utpote quàm æquabilissimè fluens per lineam, ut prænonuimus, rectam aptissimè repræsentetur, & qui in singulis temporis instantibus habentur alii ac alii, sibimet æquales, aut inæquales, velocitatis gradus per lineas itidem, ut prius etiam insinuatum est, rectas exprimantur, & cùm hi velocitatis gradus singula temporis momenta alii ac alii permeent, independenter à se invicem ac impermixtè; itaque si per lineæ tempus repræsentantis omnia puncta trajiciantur rectæ sic dispositæ, ut altera nulla nulli alteri coincidat, hoc est in situ parallelo; quæ resultat hinc superficies plana (pro quantitate temporis, & positorum velocitatis graduum ratione determinata) graduum velocitatis aggregatum exactissimè referet; cujus superficiei partes cum respectivis (ut prædictum) spatii peracti partibus proportionales sint, poterit id spatio quoque repræsentando commodissimè adaptari. Ista verò superficies brevitatis causâ deinne appellabitur velocitas aggregata, vel spatii repræsentativa. Neque quenquam afficiat, nam submovenda nobis hæc remora, quod diximus in singulis temporis instantibus longitudinem aliquam confici, quasi dari posse motum instantaneum affirmarem. Nam posito tempora è momentis componi, etiam lineæ componentur è punctis, quod si lineæ inæquales componantur è punctis infinitis, sibimet æquinumeris, necessario sequitur linearum puncta, juxta similem cum ipsis proportionem inæqualia fore, adeóque per longitudines in æquitemporaneis momentis decursas duntaxat intelligenda sunt ejusmodi inæqualia puncta, è quibus tota decursa longitudo quasi conflatur. Sin hoc absonum cuipiam videatur, & nullo sensu motus admittatur in-

ſtantaneus, eò recurrendum ut per inſtantias nil aliud, quàm indefinitas temporis particulas intelligamus; quibus reſpondeant certo velocitatis gradu, alio atque alio, percurſa indefinitè minuta ſpatiola velocitatis gradibus adproportionata; tum autem repræſentando ſingulo cuipiam velocitatis gradui per tempuſculum aliquod retento, loco lineæ rectæ ſubſtituatur oportet exiguum rectangulum dicto tempuſculo applicatum. Perinde fuerit, ac eodem recidet hoc an illo modo ſe res habeat, aſt ſimplicior & clarior videtur iſte modus, quem prius expoſuimus, cui proinde poſthac inſiſtemus. Ut redeam, & recolligam; ſicuti per omnia lineæ rectæ puncta traduci poſſunt parallelæ rectæ, magnitudine pro lubitu pares, vel impares, è quibus aggregatis ſuperficiale planum exurgat, ità ad ſingula temporis inſtantia applicari poſſunt velocitatis gradus diverſi, pares vel impares, prout mobile per totam ſuam lationem vel eundem impetum retinere; vel aliquando varium adſciſſere ſupponatur, utcunque creſcendo vel decreſcendo. Si velocitatem ſemper eandem conſervare dicatur, facilè patet è dictis velocitatem aggregatam definito cuivis tempori convenientem rectiſſimè per figuram parallelogrammam exprimi, qualis eſt AZZE, in qua latus AE temporis definiti vicem obit, reliquum AZ, eique parallelæ rectæ omnes BZ, CZ, DZ, EZ velocitatis gradus ſingulos per ſingula temporis momenta penetrantes, in hoc ſcilicet caſu pares, exhibent. Poſſunt etiam, ut dictum, parallelogramma AZZB, AZZC, AZZD, AZZE ſpatia reſpectivis temporibus AB, AC, AD, AE decurſa appoſitè deſignare. Fig. 1.

E qua conſideratione ſola, vel intuitu primo motûs hujuſmodi, quem æquabilem, & uniformem vocitant, omnia ſymptomata deduci poſſunt. Quales ſunt: quòd æquali perpetuò velocitate tranſmiſſa ſpatia ſeſe habent ut tempora: Quòd æquali tempore peracta ſpatia ſeſe habent ut velocitates; & viciſſim: Si ſpatia ſunt ut velocitates tempora fore æqualia; ſi ut tempora, velocitates æquari. Et ſi æqualia ſpatia fuerint, tempora velocitatibus proportione reciprocari; contràque, ſi tempora velocitatibus proportione reciprocentur, ſpatia ſibimet exæquari. Spatia denique quælibet compoſitam habere rationem è rationibus velocitatum & temporum; nec non, ſubducendo rationem temporum è ratione ſpatiorum reſiduam manere rationem velocitatum; vel ſubducendo rationem velocitatum relinqui rationem temporum. Hæc enim parallelogrammorum inter ſe comparatorum affectiones ſunt (æquiangulorum intelligo parallelogrammorum; nam ubi repræſentativa, hæc parallelogramma conferuntur inter ſe, æquiangula conſtituantur oportet; alioquì cùm

ſin-

ſingillatim ſpectantur; nihil refert quinam angulus ſtatuatur) hæc, inquam, è parallelogrammorum natura liquent, & ex iis quæ poſuimus ſponte conſectantur; ut nullam aliam demonſtrationem requirere videantur. Et ſanè quoad omnes Mathematicæ μέγεθος ſubditas (hoc eſt utcunque quantitatem involventes) materias cùm magnâ facilitate Theoremata perſpicere, tum ſummo eadem compendio demonſtrare poterit, quiſquis contemplationi ſuæ ſubjecta cujuſcunque generis quanta ad analogicas magnitudines ritè congruéque novit redigere. Quòd ſi porrò velocitatis gradus continuò per ſingula temporis inſtantia ſupponantur æqualiter adaugeri, vel imminui, à gradu minimo, ſeu quiete, definitum ad velocitatis gradum, vel à definito tali gradu ad quietem; conſimili pacto poterit aggregata velocitas per quamvis ſuperficiem æqualiter à puncto creſcentem ad definitam magnitudine lineam; vel eodem retrogradè paſſu decreſcentem, exhiberi; ſimpliciſſimè verò, & optimè per triangulum rectilineum; ut puta per triangulum AEY, in quo crus AE tempus denotat; ejúſque punctis applicatæ lineæ parallelæ BY, CY, DY, EY gradus velocitatis ſingulis inſtantibus congruos à puncto A (quod quietem, vel infimam velocitatem refert) ad definitum gradum lineâ maximâ EY repræſentatum æqualiter increſcentes, vel ab eadem EY retrò ad punctum A quietis repræſentativum declinantes. Sed & pari jure, quo priùs, trigona ABY, ACY, ADY, AEY per reſpectiva ab initio tempora decurſis ſpatiis repræſentandis inſervient. Et conſequenter, ſi velocitas æqualiter à definito gradu ad gradum definitum ſupponatur augeri, vel diminui, repræſentabitur tam aggregata velocitas, quàm ſpatium ei reſpondens à figura quadrangula Trapezia, qualis eſt CYYE, in figura priùs adhibita. Hinc, non ſecùs quàm in præcedentibus, hujuſmodi motûs quem uniformiter acceleratum nomine perquam apto *Galilæus* nuncupavit) affectiones omnes præcipuæ facilimè deprehendentur, atque demonſtrabuntur; cujuſmodi ſunt: Quòd æquali tempore conficietur æquale ſpatium per motum à quiete uniformiter acceleratum, ac per ipſum motum uniformem, modò velocitas hujus ſubdupla ſit velocitatis, quam ille maximam habet. Quòd ſpatia motu à quiete uniformiter accelerato peracta, ſeſe habent ut *Quadrata temporum* (vel in duplicata temporum proportione.) Et diverſos hoc modo acceleratos motus comparando: Quòd ab illis tranſacta ſpatia habeant rationem è rationibus temporum, & velocitatum maximarum: Et ſimilia talia vel his connexa, vel indè conſequentia, quæ triangulis conveniunt inter ſe quoad ſuas, & quoad laterum rationes comparatis; quæ ex poſitis haud difficilè perſpiciantur, ac demonſtrentur. Fig. 1.

ſtrentur. Porrò, non abſimiliter ſi velocitatis gradus continuâ per ſingula temporis inſtantia ſucceſſione, à quiete ad definitum gradum, vel retrogradè, creſcere concipiantur, aut decreſcere juxta progreſſi-
Fig. 2. onem numerorum quadraticorum repræſentatur tum optimè velocitas aggregata, ſicut & ſpatium hujuſmodi motu confectum, à complemento Semiparabolæ, qualis eſt AEX, cujus vertex A quietem (ſeu motûs ac temporis initium) tangens AE tempus definitum, linea BX primum velocitatis accreſcentis gradum (qui ſe habet ut 1.) proxima CX ſecundum gradum (habentem ſe ut 4.) ſubſequens DX (qui ſe habet ut 9.) & ità porrò uſque ad ultimum EX: Id quod ex notiſſima parabolæ proprietate manifeſtum eſt. Eodem planè modo quivis ſuppoſiti velocitatis gradus, utcunque creſcentis aut decreſcentis, continuò vel interruptè, quovis, inquam, imaginabili modo per lineas rectas ad temporis repræſentatricem rectam applicatas certiſſimo, commodiſſimòque modo deſignari poſſunt, aſſervatâ quam quis adſignare voluerit proportione; ſic ut inde cognitâ ſpatii repræſentantis dimenſione, ſpatii per motum confecti quantitas faciliùs innoteſcat; & reciprocè, cognitâ ſpatii dicti naturâ velocitatis ac temporis quantitatibus dignoſcendis aliqua lux affulgeat: Quæ quidem poſthac dicendorum intellectui neceſſaria, totíque motuum theoriæ non parùm ut videtur utilia viſum eſt paullo fuſiùs expoſita præmittere. Quâ perfunctus operâ pedem figo.

LECT.

Lect. II.

VArios, quibus productæ concipiantur magnitudines aggressi modos considerare, primum & præcipuum attingere cæpimus illum, qui motu peragitur locali. Cùm verò soleant *Mathematici* diversimodos, è quibus aliæ ac aliæ magnitudines resultant, motus adsumere ceu possibiles, duos ad fontes digitum intendimus, è quibus istæ motuum differentiæ scaturiunt, modum lationis ipsum, & quantitatem vis motivæ; quorum posteriorem haud ita clarum & apertum nuperrimè conati sumus recludere, limpidúmque reddere. Jam differentias quas assumunt ipsas prosequemur, & quo pacto generationi magnitudinum inservire possint ostendemus. Lationis modum spectando generantur magnitudines vel per motus simplices, vel per motus compositos, vel ex concursu motuum (nam compositionem à concursu distinguo, quæ tamen à nonnullis confunduntur.) De simplicium motuum hypothesibus, ac effectis primò videamus. Simplicium motuum duo genera sunt, φορὰ, & περιφορὰ, progressio, & circumlatio. Sub progressivo motu comprehenditur motus omnis, qui nullum fixum locum (loci nomine quamvis magnitudinem, etiam punctum adnumerans, intelligo,) respicit, cui velut innectitur, ac affigitur; seu directus iste motus sit, seu reflexus, seu refractus; sive callem certum persequatur, sive inconstanter desultet, divagetur, exorbitet. Quia verò penitus irregularium in arte nulla ratio potest haberi, sufficit *Mathematicis* supponere magnitudinem quamcunque progredi posse juxta designatam quamlibet orbitam; ut *v. g.* Quòd punctum *in linea recta, circulari, elliptica, spirali, vel alia quavis præstituta queat incedere.* Verùm præcipuæ, hoc est maximi, frequentissimique pro magnitudinibus efformandis usûs, circa hujusmodi motus quas *Mathematici* præstruunt hypotheses, sunt hæ: Quòd punctum à præfixo termino in linea recta quousque libuerit adsignare directè progredi queat, quali motu perspicuum est lineam rectam describi:

describi: Quòd linea recta per alterius cujusvis lineæ longitudinem ità procedere possit, ut situm interea parallelum perpetuò servet (hoc est ut ipsa juxta positionem, quam in quolibet temporis momento sortitur, parallela sit sibi secundum positionem suam in alio quovis temporis momento:) Item, quod linea quævis (definitè vel indefinitè protensa, quod in omnibus intelligendum) motu directo, itidem sibi parallelo, progredi possit (directo inquam, hoc est ut ejus singula puncta lineas rectas describant) qui sanè duo motus sibimet æquivalent, eundémque procreant effectum eorúmque alterutro productæ concipiantur illæ, quæ præ cæteris æquabiles, ac uniformes haberi merentur superficies; quales sunt in plano *Superficies parallelogrammæ* (seu penitus rectilineæ, sive mixtæ) in Solido (ut ita dicam, vel non in uno plano delineatæ) *Superficies Prismatica, Cylindricaque*, tum quæ stricto, tum quæ latiori significatu dicuntur. Sit in exemplum primò recta linea B C, cui insistens recta A B per ipsam B C feratur, sibi continuò parallela, donec puncto B ad C promoto recta A B ipsi D C ad A B parallelæ congruat. Manifestum est hujusmodi motu procreari *figuram planam parallelogrammam* A B C D. Patet etiam quodlibet assumptum in A B punctum, ut E, rectam lineam describere, cujus partes E E rectis A B interceptæ, rectæ B C partibus B B, per easdem respectivè rectas A B interceptis (hoc est eodem tempore à puncto B decursis) æquantur. Neque minùs patet, si vice versâ recta B C per ipsam B A feratur, eandem superficiem delineari; omniáque rectæ B C puncta (ceu F) rectas lineas effingere; nec non harum partes F F parallelis B C interceptas respectivis lineæ A B partibus B B adæquari. (Notetur autem abhinc brevitatis ergò tam in his, quàm in similibus casibus harum linearum illam, quæ motu suo magnitudinem describit à me *Genetricem* dici; alteram autem, juxta quam, vel cui insistens, prior defertur, *Directricem* appellari; quia motæ lineæ processus ab ea dirigitur, vel ad eam accommodatur.) Sit rursus linea quæpiam curva (velut arcus circularis) B C, cui in eodem plano insistat linea recta A B; & per curvam B C continuò deferatur recta A B, sibimet æquidistans, donec punctum B ad C pertigerit, & recta A B demum rectæ D C ad ipsam A B primò positam parallelæ congruerit; describetur hoc motu figura quoque plano (latiore significatu) parallelogramma; quia scilicet adversa hujus figuræ latera sibi parallela sunt, recta A B rectæ D C, & curva A D curvæ B C. Nam & hìc singula quæque *Genetricis* rectæ puncta (velut E) lineas describent *directrici* B C similes & æquales; cùm integras, tum iisdem parallelis A B interceptas partes; si enim duo

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

puncta

puncta quævis E E rectâ lineâ connectantur, iisque respondentia puncta B B rectâ quoque jungantur; quoniam rectæ E B sibimet æquantur (etenim nil aliud sunt, quam eadem ipsa linea diversum situm obtinens) ac parallelæ secundum *hypothesin*, erunt rectæ E E, B B æquales ac parallelæ. Unde patet curvas E E, B B adæquari sibimet, & assimilari. Adæquari quia subtensæ omnes E E subtensis B B singillatim æquantur; assimilari, quia rectæ A B cum subtensis adjacentibus respectivis E E, & B B pares angulos constituunt, adeóque rectæ ipsæ E E pares iis, quos rectæ B B; ipsæ illæ cum seipsis, & hæ cum seipsis (nam in hujusmodi proportionalitate partium, & angulorum æqualitate, sicut alibi fortasse luculentius & fusius disseremus, omnis consistit linearum, & quarumcunque magnitudinum similitudo.) Quod si vice commutatâ linea curva B C fiat linea *Genetrix*, & recta B A *directrix*, hoc est si B C per B A sibi parallela feratur, producetur eadem ipsissima parallelogramma Superficies; & singula rectæ B C puncta, veluti F, rectas lineas ad B A parallelas describent; neque non interceptæ F F respectivis B B pares erunt; quod & pari modo ex supposito perpetuo curvæ B C parallelismo facilè consectatur. Sit denique curva quævis (vel è rectis angulos efficientibus composita, quæ curvæ quoque nomen meritò ferat; *Archimedes* saltem è rectis compositas lineas, uti figurarum circulis inscriptarum aut adscriptarum perimetros, καμπυλὰς γραμμὰς nomine complectitur; ut & vicissim curvæ quævis lineæ censeri possunt è rectis, innumeris quidem illis indefinitè parvis, adjacentibus, & deinceps secum angulos efficientibus, conflatæ) sit, inquam, talis aliqua curva B C, in plano quovis constituta, tum in alio plano, vel super lineæ B C planum ut libet elevata, recta A B sibi continuò feratur parallela, modo quo semel ac iterum ostendimus; describetur hujusmodi motu *Superficies cylindrica* (vel certè *prismatica*, si *linea directrix* è rectis ponatur composita) & *cylindrica* quidem strictè dicta, si *directrix fuerit linea circularis*, *aut elliptica*; latiore verò sensu talis, si curva fuerit alterius generis ut *parabolica* puta, vel *hyperbolica*, vel alia quæpiam. In hoc autem motu lineæ quoque genetricis singula puncta similes & æquales describunt curvæ directrici lineas, æquales (ut in mox præcedente discursu) quoniam E B pares ac parallelæ sunt, adeóque E E, B B quoque pares, ac parallelæ; similes; *quoniam etiam anguli E E E, angulis B B B æquantur. Quinetiam reciprocè describatur eadem Superficies ponendo curvam B C per rectam A B parallelos deportari. Quomodo singula quoque curvæ B C puncta rectas parallelas & pares interceptis respectivis rectæ

Fig. 5.

Fig. 6.

10. XI. Elem.

rectæ A B partibus delineabunt, pariter ut antehac in figuræ planæ exemplo commonſtratum eſt; unde ſi ſuperficies hoc modo procreatæ à plano quolibet ad rectam ſeu genetricem, ſeu directricem (quam ubique ſitam Superficiei productæ latus appellare licet) parallelo ſecetur, ſectio communis duabus rectis parallelis conſtabit æqualibus inter ſe. De Superficiebus autem ità progenitis obſervatu dignum eſt (nec enim planè nudas magnitudinum generationes indigitare, ſed & generales nonnullas ipſarum affectiones è diverſis reſultantes generandi modis inſinuare propoſitum eſt nobis) quòd ſi linea directrix recta ſit (ut in figura per literam Z diſcriminata) Superficiei productæ partes parallelis lineis genetricibus interjectæ reſpectivis directricis lineæ partibus ſemper proportionales ſunt (ſuperficies nempe B C C B reſpectivis rectis B B:) At ſi linea curva pro directrice habeatur (ut in figura Y) non ſemper eveniet, ut interceptæ genetricibus rectis Superficies interceptis curvæ directricis partibus proportionentur; at ſaltem accidet hoc, cùm recta genetrix A B æqualiter ad curvam B C ubique, vel ſecundum omnia ejus puncta inclinatur; quomodo fit in cylindri cujuſcunque, laxè vel ſtrictè dicti, recti ſuperficie; quia tum recta
Fig. 6. genetrix omnibus curvæ punctis (hoc eſt omnibus eam ad dicta puncta tangentibus, eive ſubtenſis rectis eſt perpendicularis.) Verum ſi, in exemplum, curva B C ponatur arcus circularis, qui dividatur æqualiter ad puncta B, non erunt neceſſariò ſuperficies A B B A peripheriis æqualibus B B inſiſtentes inter ſe pares, quia (præterquam in caſu prædicto cylindri recti) rectæ A B ubique ad puncta B inæqualiter inclinantur (unam quamvis inclinationem cum alia conferendo) angulos nempe cum tangentibus ad B aliis ac aliis, & cum ſubtenſis B B inæquales efficiunt. E qua re pendet *inſuperabilis illa difficultas*, quacum conflictantur, qui *cylindricas obliquas ſuperficies conantur dimetiri, ſeu cum Cylindricis Superficiebus rectis, aliiſve quadantenus cognitis Superficiebus quoad proportionem comparare.* Supponunt denique conſimili pacto ſuperficiem quamvis planam directo motu ſibi parallelo progredi, ſcilicet ut prædicto modo, ſingula ipſius puncta lineas rectas deſcribant, inter ſe pares, ac parallelas; vel ut ejus ſingulæ rectæ (id quod indè conſectatur) planas Superficies parallelogrammas effingant; cujuſmodi motu deſcribuntur priſmatica quæque cylindricáque corpora; illa nimirum ipſa, de quorum Superficiebus mox egimus, quibúſque ſimili jure poſſunt adaptari, quæ Superficiebus iſtis oſtendimus convenire. Veluti quòd parallelis planis interjectæ Superficies ipſorum, & ipſa corpora lateribus ſuis (ſeu directricis rectæ partibus reſpectivis) proportionantur. Quòd & ſi definita hujuſmodi corpora

planis

planis laterum alicui parallelis secentur, communes sectiones erunt *Parallelogramma* (quale est E E B B.) Quin, ut paucis complectar multa, quæ *de Superficiebus aut Solidis Prismaticis ac Cylindricis strictè dictis generatim enunciantur aut probantur uspiam*, quòd ea pleraque justam analogiam observando, universis congruunt hoc modo progenitis quantis. Neque jam de progressivo motu quidpiam succurrit adjiciendum; quædam enim δυσδιήγητα consultò videntur reticenda. Porrò simplicis motûs alterum genus, quod adhibet *Mathesis*, est *circumlatio*, *seu motus conversivus*; qui tum scilicet efficitur, cùm dimotæ magnitudinis quiddam (ut punctum aliquod puta lineæ, vel Superficiei linea) fixum & immotum consistit, dum ei velut innodata ac adstricta tota reliqua magnitudo, juxta quamvis assignatam directionem, circumagitur. Cujusmodi motûs generalissima proprietas est, ut quæque mobilis puncta dum in uno aliquo plano transversè moventur, circulares singula peripherias describant; & quidem omnia, quæ in eodem uno, per fixum punctum transeunte plano moventur parallelas, seu concentricas, & similes inter se; quæ verò in diversis planis similes, aut dissimiles, prout hypothesium exigit arbitraria diversitas. Præ cæteris autem propria, maximéque naturalis est circumlatio, cùm singula mobilis puncta circulares unius ejusdem circuli peripherias describunt, hoc est cùm in uno cuncta plano circumferuntur; qualem certè tum ipsa natura sponte concipit atque prosequitur, cùm nè rectos suos quos præsertim affectat motus exequatur ab immobili retinaculo prohibere; velut in pendulorum, & libris appensorum motibus videre est; imò cùm objectâ quâvis resistentiâ non satìs facilè recto tramiti valet inhærere; sicut in *rotarum*, *& vorticum*, *& turbinum*, *& in ipsorum fortasse syderum*, *motibus adparet*. Verùm hujusmodi motuum generalem indolem haud ità promptum est verbis explicare. Præstat ipsas quas accipiunt præcipuas hypotheses percensere. Assumunt primò rectam lineam in plano circa punctum quodvis in ipsa fixum posse circumferri; cujusmodi motu patet omnia lineæ motæ puncta circulares peripherias describere; singulas ab uno quovis descriptas singulis ab altero quolibet simul eodem tempore descriptis parallelas, & similes. Ut si linea recta A B manente fixo puncto C circumferatur, singula puncta A, E, B peripherias circulares A A, E E, B B sibi parallelas, & similes omnes (iisdem nimirum, aut æqualibus angulis subtensas, quorum commune centrum, aut vertex C) describent. Hoc autem modo constat procreari circulos, & sectorum circulares areas (quales ACA, B C B,) sed & annulos planos; qualis est is qui restat, si è circulo Fig. 7.

majore A A B B detrahatur minor circulus concentricus E E E E. E qua geneſi colligitur circulorum, & ſectorum circularium areas, è circularibus peripheriis, integris aut partialibus concentricis ac ſimilibus, conſtare tot numero quot radius puncta habet; quarum proinde calculum incundo circularis areæ talis qualis dimenſio quam facillimè reperitur; id quod non eſt hujus temporis ulteriùs exponere. Quinetiam ſupponunt lineam quamvis rectam, indefinitè protenſam, uno manente fixo ipſius puncto circa deſignatam quamvis in alio plano conſtitutam lineam, curvam aut è rectis compoſitam, revolvi, ſic ut
Fig. 8. ei nempe lineæ ſemper inſiſtat, vel eam quaſi lambat, aut perſtringat. Sit, exempli cauſâ, linea recta A B indefinitè protenſa, & in ea fixum punctum V; & per V ſemper feratur linea A B juxta lineam quamlibet B C in alio plano collocatam; ità quidem ut aliquod lineæ mobilis punctum continuò lineæ B C inhæreat; ex hujuſmodi motu producetur curva Superficies (è planis ſaltem compoſita, quam & generali ratione, poſt *Archimedem*, curvam appellare nil vetat) quæ quidem ſi linea directrix tota componatur è definitè magnis rectis lineis, fiet *Superficies pyramidalis*, è triangulis ad verticem V concurrentibus aggregata; ſin circularis fuerit, aut conicarum ſectionum aliqua, Superficies evadet ſtrictè *conica*; ſin alterius generis aliqua, conica ſaltem extenſo latiùs ſignificatu dicatur; & à quibuſdam dicitur. Cujus quidem Superficiei proprietas eſt, ex ipſa generatione manifeſta, quòd ſi per fixum punctum V plano ſecetur, communis plani cum ipſa ſectio erit angulus rectilineus. Nam ſi planum ipſam ſecans per V lineæ directrici occurrat in punctis duobus, ut in D, E (occurret autem in duobus, aliàs Superficiem ipſam non ſecaret) ductæ rectæ V D, V E erunt tam in plano ſecante, quàm in curva Superficie; in plano, ex plani natura; in Superficie, quia genetrix eadem recta per harum terminos tranſit, ipſiſque proinde coincidit. In hujuſmodi verò motu poſito quòd lineæ rectæ à puncto fixo V (ſeu vertice) ad directricem lineam B C ductæ ſunt inæquales inter ſe, ſatis liquet lineam B C non à lineâ B delineari, vel perambulari, quia
Fig. 8. lineæ inæquales (ut V B, V E, V C) ſibi nequeunt congruere; adeóque punctum B progrediens ſupra, vel infra puncta B, E, C cadet, ut nec eâdem inæqualitate ſuppoſitâ punctum quodvis aliud in V B puta G) motu ſuo lineam deſcribet lineæ directrici B C ſimilem (quare linea V B ſupponitur indefinitè protenſa) at verò ſi lineæ omnes, quæ ab V ad B C duci poſſunt (quas Superficiei propoſitæ latera nuncupemus licet) proportionaliter ſecentur (id quod fiet à plano per hanc Superficiem trajecto ad planum, in quo ſita eſt B C, parallelo) diviſionum

ſionum puncta lineam conſtituent, ſaltem ad lineam conſiſtent, ipſi BC ſimilem. *Ductis enim quotlibet lateribus VB, VD, VE, VC, & ducto plano GKLH ad planum BDEC parallelo, ſint communes plani VBD cum planis BC, GH ſectiones rectæ BD, GH; hæ parallelæ erunt. Item communes plani VDE cum iiſdem planis BC, GH Sectiones DE, KL parallelæ erunt. Ergò anguli BDE, GKL ſunt æquales. Item ſe habet recta BD ad GK, ut DE ad KL, quia utraque hæc proportio æqualis eſt illi, quam habet VD ad VK (ſimilia quippe ſunt triangula VDB, VKG, & triangula VDE, VKL) permutandóque BD. DE :: GK. KL. ergò omnes ſubtenſæ in GH proportionales ſunt ſubtenſis omnibus in BC, eas nimirum in utraque linea ordinatim & deinceps accipiendo; & quæ ſibimet adjacent in una pariter inflectuntur cum iis, quæ ſibi adjacent in altera. Ergò ſecundum ſuperiùs inſinuata lineas BC, GH ſimiles eſſe conſtat. || Hinc etiam patet lineas curvas ſimiles BC, GH eandem ad ſe proportionem habere, quam Superficierum, in eadem qualibet recta ſita, latera VB, VG. Quum enim ſubtenſarum iiſdem angulis incluſarum (ut BD, GK, vel DE, KL) ſingulæ rationes æquales ſint rationi laterum VB, VG; etiam omnes antecedentes conjunctæ (hoc eſt tota BC) ad omnes conſequentes conjunctas (hoc eſt totam GH) ſe habebunt ut VB ad VG. Hinc etiam tali motu productarum ſuperficierum emergit hæc proprietas; quòd interceptæ ſcilicet à parallelis ad BC planis, à vertice deſumptæ, quibuſcunque lateribus iiſdem incluſæ partes ipſarum ſint inter ſe ſimiles; ut puta Superficies BVC, GVH; & BVD, GVK. (Quod ex generali ſimilitudinis doctrina poſthac explicanda luculentius apparere poterit; interim ex ſimilitudine linearum curvarum, & earum cum Superficiei lateribus analogia, penitúſque conſimili Superficierum generatione ſatis eluceſcit; ſaltem ex triangulorum VBD, VGK; & VDE, VKL, & talium omnium ſimilitudine ſatis conſtat; ſiquidem ex talibus infinitis triangulis utraque Superficies compoſita cenſeatur.) Unde ſimilium Superficierum proprietates iis convenient. Verùm quòd interceptas attinet à diverſis lateribus Superficies, eas inter ſe comparando, notandum eſt quòd baſibus ſuis, ſeu directricis lineæ reſpectivis partibus non ſemper proportionales ſunt; at ſaltem hoc tum evenit, cùm omnia dictæ Superficiei latera ſunt æqualia inter ſe, adeóque cùm linea directrix eſt peripheria circuli; quo caſu producta Superficies erit conica Superficies ſtrictè dicta, rectúmque quidem ad conum pertinens. Quòd ſi directrix BC ſupponatur e. g. peripheria circularis, lateráque ſibimet inæqualia, ſi

16. XI. Elem.

10. XI. Elem.

12. V. Elem.

dividatur B C in partes æquales, & connectantur latera V D, V E non erunt Superficies B V D, D V E, E V C æquales inter se, sed inscrutabili plerumque ratione; juxta varias angulorum inclusorum, & laterum inæqualium differentias, inæquales; id quod hactenus illos divexavit & torsit, *qui dimetiendæ coni scaleni superficiei incubuerunt.* || Ex his consectatur quòd possit hujusmodi circumlatio facta quadantenus concipi motu quoque tali lineæ rectæ genetricis, ita ut ejus singula quæque puncta parallelos lata similes directrici lineæ lineas describant, modo tamen concipiatur linea genetrix ubique proportionaliter aut contrahi, vel dilatari secundum omnes sui partes. Quomodo nempe si recta V B ita sensim diduci concipiatur, ut punctum B totam lineam B C perambulet, etiam punctum G parallelo ad B C motu delata, lineam G H ipsi B C similem describet. Quinimò si consimili pacto curva B C, directo quoad lineam rectam B V motu sitúque semper ad seipsam parallelo concipiatur promoveri, sic ut ejus singula quæque puncta lineas rectas describant, secum omnes in punctum V concurrentes; hoc est ità ut ipsa per totum suum progressum juxta suas omnes partes analogicè contrahatur, ad verticem usque V; producentur ex hujusmodi motibus Superficies conicæ prorsus eædem cum jam proximè tractatis. Verùm hujusmodi motus imaginarii sunt, & quales rerum natura respuit. Explicandæ tamen hujusmodi Superficierum naturæ deservire possunt, & supponi saltem ut per *divinam potentiam effectibiles.* || Ad hæc, si *linea directrix* in motu proximè memorato supponatur undique clausa, sic ut figuram quamvis comprehendat, Superficies curva progenita cum hac figura, ceu basi, corpus solidum includet pyramidale, vel conicum (strictè vel laxè pro dictæ figuræ natura sumptum) cujus generalia symptomata satis è dictis eluceſcunt. Nempe quòd à parallelis ad hujusce solidi basin planis abscindentur similes ad verticem Superficies, similésque bases intercipientur, & similia corpora Solida progignentur. Verbo dicam, quæ de *Conis* generatim *Euclides*, *Apollonius*, aliique tradiderunt, ea conicis hoc modo factis, servatâ debitâ analogia, convenient, & simili ferme modo demonstrabuntur convenire. || Verùm usitatissimus apud Mathematicos corpora progignendi modus est is qui peculiari nomine *Rotatio* dicitur, & fit suppolito lineam quamvis, aut quamlibet Superficiem planam circa rectam lineam fixam, tanquam axem, revolvi. Quomodo ex motu Semiperipheriæ circularis circa diametrum producitur *Sphæricæ Superficies*, ex motu Semicirculi ipsius circa eundem *Sphæra* detornatur; ex motu lineæ rectæ circa lineam ipsi parallelam *Superficies Cylindrica*; ex motu parallelogrammi rectanguli circa latus unum ipse *Cylindrus rectus*; ex motu cruris

unius

unius anguli rectilinei circa alterum *Conica Superficies*; ex rectanguli trianguli circa crus unum anguli recti *conus* ipse deformatur; eoque pacto *cùm integræ cum suis Curvis Superficiebus Solidæ magnitudines innumeræ, tum ipsarum portiones, frusta, tubi, annuli procreantur.* Cujusmodi motûs hæc præcipua proprietas est, quòd singula quæque magnitudinis circumductæ puncta peripherias obeant circulares (integras quidem illas, modò perfecta sit revolutio, seu mobile denuo primum in situm restituatur, at similes utcunque sibi mutuo, quæ simul describuntur) quarum omnia Centra sunt in dicto axe, radii verò sunt rectæ ab ipsis punctis ad axem perpendiculares. Vel; quod omnes in mobili sitæ rectæ lineæ axi perpendiculares efficiunt circulos (si revolutio ponatur integrè peracta) aut circulares similes sectores, illos intelligo qui simul eodem tempore delineantur. Ut si Fig. 9.
v. g. linea quævis circa axem V K rotetur, eo procreabitur motu curva quædam Superficies, circularibus quasi peripheriis constans (*Atomisticarum* enim phrasin facilitatis, perspicuitatis, brevitatis, addere licet & verisimilitudinis causâ non illibenter usurpo) circularibus, inquam, peripheriis A Y, B Y, C Y, D Y per puncta A, B, C, D reliquáque quæ sunt in V D cuncta decircinatis; quarum radii sunt rectæ A Z, B Z, C Z, D Z axi perpendiculares, & Centra Z in axe. Quòd si revolutio tantum eousque continuatur, donec V A D sit in situ V $\alpha\delta$, constabit *effecta Superficies* ex arcubus A α, B β, C γ, D δ, similibus inter se eodem modo si planum V D Z circa axem V K revolvatur, posito quòd integra peragatur conversio, producetur Solidum quasi constans innumeris circulis parallelis A Y, B Y, C Y, D Y, quorum (ut priùs) radii A Z, B Z, C Z, D Z, centra Z; positóque quod circulatio desistit in situ $\delta\nu$ K, constituetur Solidum è sectoribus A Z α, B Z β, C Z γ, & reliquis inter se similibus. Cæterùm prætermittenda non est animadversio quædam perquam utilis, & necessaria circa *modum Superficierum, & Solidorum hoc modo resultantium dimensiones investigandi juxta methodum indivisibilium, omnium expeditissimam, & modò ritè adhibeatur haud minùs certam & infallibilem.* Objicit huic methodo non semel, in pererudito suo de *Solidis cylindricis ac annularibus libello, doctissimus A. Tacquetus*, eóque se putat illam destruere, quòd per eam inventæ *conorum, & sphærarum superficies* (quantitates horum intelligo) veræ per *Archimedem* repertæ ac traditæ dimensioni non respondent. Sit exemplo *rectus conus* D V Y, cujus axis V K; per cujus omnia puncta transire concipiantur axi perpendiculares rectæ Z A, Z B, Z C, | Z D, &c. è quibus nempe juxta *methodum atomicam* com- Fig. 10, 11,
| K ponitur 12.

ponitur ipsum *triangulum rectangulum* V K D; & è circulis ad quas ceu radios descriptis ipse *conus* conflatur. Ergò, disputat, ex horum circulorum peripheriis *Superficies conica* componetur; quod tamen veritati comperitur adversari; methodúsque proinde fallax est. Repono, malè calculum hoc pacto iniri; & in peripheriarum è quibus *Superficies* constant computatione diversam instituendam esse rationem ab ea, quâ computantur lineæ quibus *planæ superficies* constant, aut plana, è quibus corpora formantur. Nempe peripheriarum Superficiem curvam constituentium è revolutione prognatam lineæ V D censeri debet è multitudine punctorum, quæ sunt in ipsa linea genetrice V D; quippe cùm per ea singula puncta tales peripheriæ transeant, nec plures transire queant; quicunque sit axis, seu longiùs distans, seu propiùs adjacens; axis enim solummodo, pro longiore vel propiore distantia positioneque varia, dictarum peripheriarum magnitudinem determinat. Verùm multitudo linearum ex quibus planum D V K supponitur constare, planorúmque quibus Solidum D V Y constat, è numero taxanda est punctorum in axe V K; nec enim plures intra terminos V K parallelæ, ipsi V K perpendiculares, rectæ, vel plura talia parallela plana duci possunt, quam horum punctorum multitudini æquinumera. Quod observando *discrimen* (sedulò perpendendum) omnem devitabimus errorem, & *curvarum hujusmodi rotatu genitarum Superficierum facillimo, reor, omnium quos rei natura subministrat modo perquiremus.* Illum commonstrabo. Pro reperienda v. g. dimensione *curvæ superficiei* lineæ V D circa axem V K revolutione, concipiatur ipsa V D in directum extendi, ità scilicet ut ei exæquetur recta V D; & ad ejus omnia puncta rectæ concipiantur applicari ipsi V D perpendiculares, & peripheriis circularibus, è quibus Superficies curva conflatur, ordine pares; singulæ singulis, puta A X ipsi A Y, & C X ipsi C Y, ac ità continuo. Erit ex his parallelis rectis constitutum planum V D X æquale *dictæ curvæ superficiei*; hujúsque partes illius partibus respectivis. Sin loco *peripheriarum* applicentur ipsarum respectivi radii A Z, B Z, C Z, & reliqui; spatium ex his rectis constitutum (quæ sanè proportionali cum alteris serie procedunt) se habebit ad *curvam Superficiem, ut circuli cujusvis radius ad ejus circumferentiam.* Unde siquâ ratione deprehendi possit *Summa radiorum peromnia lineæ genetricis puncta transeuntium* (hoc est si *spatii V D Z dimensionem* reperire contigerit) eo statim innotescet *curvæ Superficiei dimensio.* In exemplum, facilitatis ergò, proponatur *conica Superficies* D V Y, è rotatu procreata rectæ V D, circa axem V K. Ad rectam V D applicentur

Fig. 10, 11, 12.

plicentur rectæ AZ, BZ, CZ, DZ ad ipſam VD perpendiculares, & æquales ſingulæ ſingulis in cono circulorum radiis per eaſdem literas deſignatis; fiet autem in hoc caſu *Spatium* VDZ triangulum, quia rectæ AZ, BZ, CZ æqualiter à ſe diſtantes æqualiter increſcunt, id quod trianguli applicatis omninò proprium eſt. Hujus autem trianguli, ex datis altitudine VD & baſe DZ, dimenſio in promptu eſt. Quod ſi fiat *ut circuli radius: Ad circumferentiam ipſius, ità triangulum VDZ ad quartum*, erit hoc quartum æquale *Superficiei conicæ propoſitæ*. Eodem planè modo perquam facilè *Sphæræ, Sphæricarúmque portionum Superficies* (nec, datis & præcognitis iis quæ requiruntur, alias quaſlibet hoc modo natas) inveſtigare licet. At mihi propoſitum eſt generalioribus tantùm inhærere. || Hanc autem magnitudinum geneſin æmulatur, & affinitate quâdam contingit iſte modus, quum circa rectam lineam, (aut quidem circa quamvis aliam) ſimiles innumeræ lineæ, vel figuræ parallelo juxta ſe ſitu diſpoſitæ taliter conſtituuntur, ut ſingulæ centrum ſuum habeant in dicta linea, quæ proinde tanquam axis rationem ſubit, ac talis denominatur. Quomodo, e. c, in *cylindris obliquis*, inque *conis Scalenis* circuli circa lineam quandam rectam conſiſtunt; quæ propterea dicitur ipſorum *axis*, quoniam in ea circulorum parallelorum *centra* exiſtunt. Sed cùm motus ità diſtortos natura non capiat (ſaltem juxta modum operandi ſimplicem quem nunc ſupponimus) & quia poſſunt hujuſmodi magnitudines ut modis aliis genitæ faciliùs concipi, de iis abſtinebimus. Neque non de magnitudinum per motus ſimplices effectione ſufficiet hactenus diſſeruiſſe. ||

LECT.

Lect. III.

Quomodo per *motus simplices progressivum, & conversivum effectæ concipiantur magnitudines, & qualia generationes istas consequuntur symptomata* (nonnulla saltem præcipua) *connisi sumus exponere ad compositos nunc, & concurrentes, eidem proposito servientes, motus accingimur*; quorum in effectis discernendis velocitates, secundum quas simplices peraguntur motus, omnino, vel cum primis considerandæ sunt; quarum in generatione per motus simplices nulla prorsus habetur ratio. Per eundem enim motum simplicem seu velocior is sit, seu tardior eadem magnitudo, quamvìs non eodem temporis intervallo, producitur; idem nempe *circulus* ex ejusdem rectæ circa punctum in ea fixum, *eadem Sphæra* ex Semicirculi circa *diametrum* rotatu; quamvìs ut hæc fiant eò magìs aut minus expectandum sit, quo segnior aut citatior supponitur ea progenerans motus. Verùm in generatione per motus compositos iisdem manentibus lationis modis, prout unius aut plurium variatur velocitas, nedum specie, sed etiam quantitate diversæ magnitudines emergere solent, positione saltem perpetuò differentes. Ut si recta A B per rectam A C parallelo deferatur æquabili motu; & simul punctum M in A B descendat uniformiter; vel simul recta A C parallelo quoque uniformi motu descendens ipsam A B promotam intersecet in M; ex ejusmodi motuum compositione vel concursu producetur recta linea A M. Quòd si eodem, etiam quoad velocitatem manente motu rectæ A B, immutetur in velocitate motus uniformis puncti M, vel rectæ A C, ità quidem punctum M jam eodem tempore pervenerit ad μ, vel A C secet ipsam A B in μ, describetur hoc motu alia recta A μ à priore A M positione diversa. Sin verò, manente rursus eodem motu rectæ A B, pro motu puncti M, vel rectæ A C uniformi substituatur motus, quem vocant, æqualiter acceleratus, ex ejusmodi compositione, vel concursu fiet linea parabolica

Fig. 13.

parabolica A M X vel etiam aliter posita A μ Y (prout hic motus acceleratus gradu ponitur alius ac alius.) Quòd si quâpiam aliâ ratione crescere concipiatur, aut minui dicti puncti vel lineæ velocitas alia progignetur inde, pro ratione *hypothesis*, diversa species magnitudinis. In his conspicitur exemplis quòd eodem subinde recidant *compositio motuum et concursus*; quod exinde quidem contingit, quia rectæ cujuspiam parallelo motu latæ singula puncta rectas describunt sibi parallelas; unde fit ut perinde sit an punctum ejus aliquod in ipsa fixum deferatur cum ea, vel solutum per lineam ejus directioni parallelam; ut nempe utrùm punctum M in AC fixum cum ea deferatur, an liberè decurrat per rectam AB eâdem velocitate. At sæpe non ita facile per horum utrumlibet modum *magnitudinum generatio* declaretur, sit enim recta AB æquabiliter rotata (hoc est, ita ut temporibus æqualibus æquales efficiat angulos) et simultaneè punctum M ab A in ipsa recta A B continuo motu feratur, etiam uniformi; ex ista *motuum* compositione linea quædam producetur, *helix* scilicet *Archimedea* (nam talia consultò proponimus *exempla, quò celebrium apud Mathematicos magnitudinum obiter naturam insinuem*, et instillem minùs ad hæc exercitatis; id transcurrens moneo) cujus generatio per nullos, opinor, mobilium concursus, liquidò commodéque satis explicetur; ita nimirum ut motuum istorum, vel eorum quantitatem determinantium angulorum, seu linearum, ratio, quantitasve dignoscantur. Generari quidem poterit è concursu paralleli motûs rectæ AC; vel circularis motûs rectæ BA circa Centrum quodvis B, concursu cum prædicto regulari motu circa Centrum A; at quæ sit tum futura rectarum AM, Aμ; vel angulorum ABM, ABμ quantitas difficilè constabit. E contrà, si recta BA circa Centrum B motu roretur uniformi; et simul recta AC per AB parallelos, & uniformiter deferatur, rectarum BA, AC ita latarum intersectio continua lineam quandam efficiet (illam nempe, quæ quadratrix dici solet) cujus generatio non ità clarè per strictè dictam motuum compositionem expediatur, aut explicetur. Generari quidem potest per motum rectum alicujus puncti M in AB delatâ parallelos ad primò positam AB; vel ex puncto tali in AC parallelo quoque delatâ; vel per motum puncti in AB, circa B; vel circa A rotatâ, rectè ab A versus B, vel à B versus A decurrentis; sed hujusmodi snppositâ quâpiam motuum compositione, quænam sit rectarum AM, aut BM; vel angulorum BAM aut ABM aut AMB, vel aliarum quarumvis magnitudinum hosce motus determinantium quantitas, aut inter se relatio, difficulter innotescat. Qua præcipuè de causa

Fig. 14.

Fig. 15.

motuum compoſitionem ab ipſorum concurſu ſecerno; quia nempe magnitudinum generatio nunc uno, nunc alio modò faciliùs explicatur. Verum ad illos diſtinctius exponendos accedo. De compoſitione primum. Cùm autem motus duobus modis compoſitus intelligi poſſit; vel ut è pluribus motibus aggregatus, vel ut de pluribus participans; de poſteriore nos diſſertamus; quem fortè non meliùs quàm prænobilis Philoſophi verbis, & exemplis enucleatum dem.

Carteſ. princ. II. 31, 32. "Etſi autem (inquit ille) unumquodque corpus habeat tantùm "unum motum ſibi proprium, quoniam ab unis tantùm corpori- "bus ſibi contiguis, et quieſcentibus recedere intelligitur, parti- "cipare tamen etiam poteſt et de aliis innumeris; ſi nempe ſit "pars aliorum corporum alios motus habentium. Ut ſi quis am- "bulans in navi *horologium in* pera geſtet, ejus horologii rotu- "læ unico tantùm motu ſibi proprio movebuntur; ſed participa- "bunt etiam ex alio, quatenus adjunctæ homini ambulanti unam "cum illo materiæ partem component; et ex alio quatenus erunt "adjunctæ navigio in mari fluctuanti; et ex alio quatenus ad- "junctæ ipſi mari; et denique alio, quatenus adjunctæ ipſi terræ, "ſiquidem tota terra moveatur. Omnesque hi motus revera e- "runt in rotulis iſtis, ſed quia non facilè tam multi ſimul intel- "ligi, nec etiam omnes agnoſci poſſunt, ſufficiet unicum illum, "qui proprius eſt cujusque corporis in ipſo conſiderare. Ac præ- "terea ille unicus cujuſque corporis motus, qui ei proprius eſt, "inſtar plurium poteſt conſiderari; ut cùm in rotis curruum du- "os diverſos diſtinguimus, unum ſcilicet circa ipſarum axem, et "alium rectum ſecundum longitudinem viæ per quam feruntur. "Sed quòd ideò tales motus non ſint revera diſtincti patet ex eo, "quòd unumquodque punctum corporis quod movetur unam tan- "tum aliquam lineam deſcribat. Nec refert quòd iſta linea ſæpe ſit "valde contorta, et ideò à pluribus diverſis motibus genita vi- "deatur, quia poſſumus imaginari eodem modo quamcunque li- "neam etiam rectam, quæ omnium ſimpliciſſima eſt, ex infini- "tis diverſis motibus ortam eſſe. Ut ſi linea AB feratur verſus "CD, et eodem tempore punctum A feratur verſus B, linea

Fig. 16. "recta AD, quam hoc punctum A deſcribet, non minus pende- "bit à duobus motibus rectis, abA in B et ab AB in CD, quàm "linea curva, quæ à quovis rotæ puncto deſcribitur, pendet à "motu recto et circulari. Ac proinde quamvis ſæpe utile ſit u- "num motum in plures partes hoc pacto diſtinguere ad facilio- "rem ejus perceptionem; abſolutè tamen loquendo unus tantùm

in

"in unoquoque corpore est numerandus. Ita *Cartesius*. Nempe cùm magnitudo quæpiam exinde quod aliis modo quopiam adnectitur, illorum motus ita particeps est, ut ab eo quoad situm suum aliquatenus determinetur, iste motus hujus compositionem quasi pars ingreditur, ab exemplis posthac adjungendis res luculentius apparebit. Motus autem hoc modo componi possunt *Progressivi* cum *Progressivis*, *Progressivi* cum *Circumlatitiis*, *Circumlatitii* cum *Circumlatitiis*; componi possunt, inquam, et decomponi modis innumeris; quorum omnium cùm inire censum impossibile sit, illosque qui à regularitate deflectunt intelligere difficile sit, exponere difficilius; nos præcipuos saltem aliquos, in usu magis positos, et explicatu faciliores attingemus. Quales imprimis sunt ii qui è motibus directis et parallelis; è directis et rotatitiis, è pluribus rotatitiis componuntur; præsertim illi quos qui constituunt simplices motus omnes vel nonnulli sunt uniformes. Nam *uniformitatem nedum Respublica requirit, ac exigit Ecclesia, sed artes etiam atque scientia vehementer affectans.* Recti motus (quibus parallelos à recta linea directos motus adnumero) primum sibi non immeritò locum asserunt, ut simplicitate præcellentes, naturæ convenientes et chari, præ cæteris utiles ac usitati. Nec ulla sanè magnitudinis est species (nulla linea, nulla superficies, nullum corpus) cujus generatio non è rectis peracta motibus concipiatur. Omnis, inquam, in uno plano constituta linea procreari potest è motu parallelo rectæ lineæ, et puncti in ea; omnis superficies è motu parallelo plani, et lineæ in eo (lineæ scilicet alicujus è rectis modo jam insinuato motibus progenitæ) consequenter et linea quævis etiam in curva superficie designata rectis motibus effici potest. Corpus autem solidum eodem modo genitum intelligatur, quatenus è superficierum genitura resultat, et quatenus ab ipsis ità genitis terminatur, ac circumscribitur Sed quia *superficierum plerarumque curvarum*, quales hactenus *Mathesis* excogitavit, & linearum in iis non in uno plano jacentium, generatio per alios modos commodiùs explicetur, neque mihi quicquam succurrit animadversione dignum quod de iis dicam, de linearum saltem in uno plano existentium, per rectos et parallelos motus generatione dispiciam. Et quidem has quod attinet, earum nulla est quæ non ex motu parallelo lineæ rectæ, punctique per eam delati producatur; verum hi motus eo contemperari modo debent, quem specialis lineæ producendæ natura poscit; nec refert qualem, velocitatis respectu, motum uni tribuas, ad hujus modò

diverſitatem alterius diverſitas ritè conſequatur accommodeturque. Ut e. g. ſi recta Z A ſemper per rectam A Y ſibi parallela feratur motu quolibet uniformi, vel difformi (creſcente, vel decreſcente vel alternante ſecundum velocitatem, juxta rationem quamvis imaginabilem) et in ea punctum aliquod M deferatur, ità tamen ut puncti motus lineæ rectæ motibus per ſingulas quasque temporis partes eaſdem proportionentur, producetur utique linea recta. Nempe ſi fuerit ſemper A B . A C :: B M . C μ . vel A B, M X :: A M, X μ (poſitâ ſcilicet M X ad A C parallelâ) liquet puncta A, M μ in una recta verſari. Eſt enim rectæ lineæ proprietas in Elemento VI. demonſtrata, quòd ad eam parallelos applicatæ rectæ lineæ ſuis ad deſignatum in ea punctum diſtantiis proportionales in rectam lineam terminantur. Quòd ſi motus hi ſic inter ſe contemperentur, ut aſſumptâ quâdam lineâ D habeat rectangulum ex differentia lineæ D, & ipſius B M (à puncto mobili decurſæ in recta A Z) & ipſa B M ad quadratum ex A B (eodem tempore decurſa à linea A Z) rationem ſemper eandem progignetur *ellipſis aut circulus*; circulus quidem ſi ratio propoſita fuerit æqualitas, & angulus Z A Y rectus, *ellipſis* ſi ſecus; & in his erit D una *diametrorum*, ſitum habens in linea A Z primò poſitâ, à vertice A porrecta verſus partes Z. Sin ità ſe habeant, ut rectangulum ex ſumma linearum D, & B M & ipſa B M ſemper eandem cum quadrato ex A B proportionem ſervet, eo compoſito motu procreabitur *hyperbole*; quadrata quidem illa (vel æquilatera rectangula) ſi ratio deſignata fuerit æqualitatis, & angulus Z A Y rectus; ſin aliter, alterius, pro rationis aſſignatæ quantitate, ſpeciei; cujus *tranſverſa diameter* æquabitur ipſi D, ſitum habens in Z A primò poſita à vertice A protenſa verſus partes averſas ab Z; & parameter ex ratione data determinatur. Quòd ſi perpetuò rectangulum ex ipſa D, & decurſa B M ad quadratum ex A B eandem perpetuò rationem obtinet, conſtabit effici *lineam parabolicam*, cujus *parameter* ex rectæ D, datæque rationis propoſitæ quantitate facilè definietur. Et in horum primo quidem caſu ſi motus tranſverſus per A Y ponatur uniformis, etiam motus deſcendens per A Z uniformis erit; in ſecundo & tertio ſi motus per A Y ſit uniformis, erit motus deſcendens perpetuò creſcens; eodemque poſito quoad ultimum caſum, in quo parabola fit; punctum M continuò velocitate creſcet æqualiter. Nec abſimili modo quævis alia linea tali motûs compoſitione producta concipi poteſt. Sed ut eò quo tendimus aliquando perveniamus; agedum videamus ecquid in *rem Mathematicam* utilitatis ex hujuſmodi

Fig. 17.

modi ſuppoſita linearum generatione poterimus indipiſci. Simplicitatis autem & perſpicuitatis cauſâ ſupponamus alterum ex his motibus, rectæ nimirum paralleliſmum ſervantis, eſſe ſemper uniformem, & quænam ex alterius quoad velocitatem generalibus differentiis generales emergant linearum productarum affectiones adnitamur elicere. Adnitamur inquam, at proxima lectione.

LECT. IV.

Propoſitum eſt nobis è compoſitione motuum (qualem proximè deſcripſimus) emergentes linearum affectiones indagare ac exponere. Quorſum imprimis methodi cauſâ repeto ſi recta AZ per rectam AY ſibi perpetuò parallela feratur uniformiter, et in ea quoque punctum M uniformiter deportetur, quâvis velocitate, linea recta proveniet. Sumantur enim duæ quævis lineæ mobilis AZ poſitiones, ad B ſcilicet & C; & quia motus per AY ponitur uniformis, erunt decurſa ſpatia AB, AC ad ſe, ut *Tempora*; ſed et ob motum uniformem puncti M etiam rectæ BM, CM ſe habebunt ut eadem tempora; eſt igitur AB. AC :: BM. CM. Unde liquet puncta A, M, M in una recta linea exiſtere. Parique ratione conſtat idem de punctis omnibuſcunque, quibus punctum M per totum ſuum curſum inſiſtit, aut coincidit. Supponatur ſecundò punctum M motu continuo increſcente deferri (juxta quamlibet velocitatis rationem, regulari modo quocunque nil intereſt, an irregulari) aio *ſuppoſitionem hanc conſectari progenitarum linearum quas apponemus proprietates generales* (quales uni tali linearum generi convenientes certè præſtat ex unimoda communi generatione ſimul univerſas elicere, quàm de ſingulis, ut paſſim fieri ſolet, ſingulas ſeparatim oſtendere.) Notetur interèa, quòd brevitatis cauſâ motum parallelum uniformem rectæ AZ per AY appellabo ſubinde *motum tranſverſum*; puncti verò moventis ab A in linea AZ motum vocitabo *deſcenſum*, aut *motum deſcendentem*, habito ſcilicet ad figuram exhibitam reſpectu. Item quòd, ob motûs per AY et ei parallelas uniformitatem, poſſit ea cum ipſius partibus motûs tempus, et ejus partes repræſentare. Jam ad dictas proprietates expendendas accedo. I. Hoc-

Fig. 18.

Fig. 19.

Fig. 19. I. Hoc modo (per motum nempe tranſverſum uniformem, & deſcenſivum continuò creſcentem) progenita linea per omnes ſui partes curva evadet. || Accipiantur enim in ipſa tria quælibet puncta M, N, O; per quæ tranſeant BZ, CZ, DZ ad AZ parallelæ, & per puncta M, N ducatur recta MNK. Et quia recta MN gignitur è motu compoſito tranſverſo per BC (vel huic parallelam MG) & deſcendente per AZ, uniformi utroque; tranſverſus autem per MG eſt prorſus idem cum tranſverſo, quo linea propoſita MNO deſcribitur; patet velocitatem deſcendentis motûs uniformis rectam MN gignentis minorem eſſe velocitate, quam motus itidem deſcendens, lineam MNO deſcribens, habet in N (etenim niſi motus hic velocior jam ſit illo, cùm continuò creſcere ponatur, in toto tempore deſcenſus per GN illo tardior fuiſſet, adeóque nunquam eodem tempore ſpatium æquale tranſegiſſet, nec unà cum eo pertigiſſet ad punctum N) ergò motus hic inæqualis & increſcens per tempus motûs uniformis CD continuatus (quo nempe gignitur linea NO) majus ſpatium emetitur, quàm uniformis motus deſcendens, quo MN. ad K protractus deſcribitur, eodem tempore CD; (liquet enim eodem tempore à majore vi creſcente majus ſpatium peragi, quàm à minore neutiquam creſcente) quare linea HO major eſt quam HK; adeóque tria puncta M, N, O non exiſtunt in eadem recta linea; quod cùm tribus quibuſvis lineæ MNO punctis conveniat, abunde patet eam eſſe nullibi rectam, ſed per omnes ſui partes incurvatam, & inflexam.

II. Hinc emergit *Corollarium*; velocitas motûs uniformis deſcendentis, quo curvæ MNO ſubtenſa quævis (ut MN) deſcribitur, exiſtente ſcilicet communi tranſverſo motu uniformi quo ipſa, ejúſque arcus fiunt, minor eſt velocitate, quàm motus deſcenſivus increſcens habet ad communem utriuſque terminum N.

III. Hujuſce curvæ *ſubtenſa* quælibet (ut MO) intra *ſuum arcum* (verſus partes AZ) tota cadit, & producta tota cadit extra lineam MNO.

Elem. III. 2. *Apoll.* I. *Seren.* I. 8. Nam ſi ſumatur in arcu MO punctum quodvis N, & connectantur rectæ MN, NO liquet totam MO intra rectas MN, NO jacere, & proinde intra curvam MNO. Tota verò, ſi producatur, extra lineam MNO cadit, quia nuſquam alibi ei occurrit, utì mox oſtenſum.||

Hoc accidens de circulo ſpeciatim demonſtrat *Euclides, de ſectionibus conicis Apollonius; de cylindricis Serenus.*

IV. Patet

IV. Patet curvam propoſitam eſſe convexam, aut concavam ad eaſdem partes (convexam verſus partes ſuperiores vel exteriores AY, concavam introrſum, aut deorſum verſus AZZ) nam hoc ipſum, fore convexum aut concavum ad eaſdem partes, nil omnino deſignat aliud, quàm à nulla recta linea præterquam duobus punctis ſecari; nec aliò recidit, quam initio libri de ſphæra & cylindro tradit *Archimedes*, lineæ ad eaſdem partes cavæ definitio. Perſpicuum eſt v. g. ut linea MN duobus in punctis M, N curvam MNO ſecans ei rurſus occurrat, ut puta in K, debere curvam MNO reflecti, verſúſque partes AY recurvari; id quod modò demonſtratum eſt non poſſe contingere. Quapropter ipſa linea verſus eaſdem partes convexa eſt, ſeu concava.

V. Apertiſſimè conſtat lineas quaſvis rectas (ut BZ, CZ) genetrici AZ parallelas propoſitam curvam ſecare (modò contineantur intra terminos motûs per AY; quia curva per harum quamvis indefinitè promotam deſcripta cenſetur) addo quod harum quælibet curvam in uno tantùm puncto ſecat. || Id patet, quia recta genetrix AZ per unicum duntaxat inſtans temporis durat in ſitu quovis uno, ſeu BZ; ſimúlque pertingit ipſam BZ, ac deſerit; prætérque punctum unum M in BMZ reliqua cuncta lineæ curvæ puncta ſunt in parallelis ad BZ. Ergò liquidum eſt ipſam BZ in uno tantùm puncto curvam ſecare. || Hoc ipſum de parabola, & hiperbola ſpeciatim oſtendit *Apollonius*; de ſectionibus conoideon *Archimedes*. *Apoll.* I. 26. *Arch. de Conoid. & Sph.* 16.

VI. Non diſſimili modo patet ad AY parallelam quamvis, (qualis PG) unico puncto propoſitam curvam attingere. || Quòd ſemel occurret (modò contineatur intra limites deſcenſûs per AZ) patet, quia punctum mobile continuò deſcendens, indefinito progreſſu, eam indefinitè protenſam aliquando trajiciet; nec in eo tamen præterquam ad unum temporis momentum perdurat. || Videatur hoc de ſectionibus conicis oſtendens *Apollonius*. I. 19.

VII. Patet omnes curvæ ſubtenſas rectas cum AZ & ei parallelis, ſi producantur, concurrere.

Quòd enim ſubtenſa quævis, ut MN, uni parallelarum alicui, ut BR, occurrit, ibi ſcilicet ubi ipſa curvam ſecat, exinde manifeſtiſſimum eſt, quòd tota curva per parallelum dictæ rectæ motum deſcribitur. Ergò, cùm uni occurrat, omnibus occurret; quæ enim uni parallelarum

larum æquidistat recta, pariter omnibus æquidistat, ut in elemento primo demonstratur.

I. 22. Operæ pretium existimavit *Apollonius* hoc de *parabola*, & *hyperbola* speciatim demonstrare.

VIII. Simili modo patet rectas quascunque curvas tangentes una tantùm excipitur, ad extremum lineæ recurrentis. Vid. 18. hujus. Iisdem parallelis occurrere. || Etiam hoc, quoad *sectiones conicas*, uno vel altero *Theoremate* demonstravit *Apollonius*. I. 24, 25.

IX. Quinimò rectæ quævis ipsam AZ secantes (infra punctum A, supráque limitem, siquis erit, motûs descensivi) curvam secabunt.

Cùm enim omnes ipsi AZ parallelas secent etiam infinitè productæ curvam secent oportet. *Hujusmodi Symptomatis demonstrationi in sectionibus conicis* laborioſam operam impendit *Apollonius*. I. 27, 28.

X. Porrò liquet applicatas ad rectam AY, ipsi AZ parallelas (quas nempe propositæ curvæ sinus versos appellare fas erit minorem inter se rationem habere (minores cum majoribus comparando, seu minores antecedentium loco ponendo) quàm habent respectivæ ipsius AY partes, iisdem temporibus decursæ (quas & curvæ propositæ sinus rectos appellare nil dubitem.) Nempe BM ad CN minorem rationem habet, quàm AB ad AC, vel BM ad CF; quia CN ⊏ CF. || Hoc de circulis, & aliis curvis speciatim reperiatur passim ostensum.

Ad sequentia notandum, quod si recta transversim & parallelos mota retrogradè (à D puta versus A per DA) moveri concipiatur, ab aliquo curvæ propositæ puncto, velut O, incipiens; eâdemque semper ratione dictum punctum ab O ascendens quoad velocitatem decrescat, quâ ad ipsum O descendens increverat, eadem curva producetur. Quidni? Cùm idem motus sit, inversè tantum consideratus.

XI. Supponatur rectam lineam TMS propositam curvam in puncto M tangere (sic ut eam nempe non secet) occurrátque tangens hæc rectæ AZ in T, ducatúrque per M rectá PMG ad AY parallela; dico velocitatem puncti descendentis, eóque motu curvam describentis, quam habet ad contactum M, æquari velocitati, quâ recta TP describetur uniformiter eodem tempore, quo recta AZ fertur per

per AC vel PM. (vel, quòd eodem recidit, dico quòd velocitas puncti descendentis in M ad velocitatem quâ fertur recta AZ se habet, ut recta TP ad PM.) Sumatur enim ubivis in tangente punctum aliquod K, & per ipsum ducatur recta KG, curvæ occurrens in O, parallelis autem AY, & PG in D, & G. Et quia tangens TM duplici concipiatur uniformi motu descripta, altero rectæ TZ per AC vel PM parallelas delatæ, altero puncti descendentis à T per TZ; & sit horum motuum alter per AC, vel PM communis vel idem cum illo quo curva describitur; cùm TZ est in situ KG, erit AZ in eodem; ergò cùm punctum à T descendens fuerit in K, erit punctum ab A descendens in curvæ cum KG intersectione O (nec enim, ut anteà deductum est, alibi recta KG curvam secat) est autem punctum O infra K quia tangens extra curvam tota versatur. Jam si punctum K ponatur supra contactum versus T, quoniam tum OG minor est quàm KG, liquet velocitatem puncti descendentis, quo curva describitur, in curvæ puncto O minorem esse velocitate motûs uniformis descendentis, quâ tangens efficitur; quoniam illa semper increscens eodem tempore (per GM repræsentato) minus spatium transigit, quàm hæc minimè crescens; ast eadem continuò perseverans; illa scilicet rectam OG hæc rectam KG conficit. Contra vero si punctum K infra contactum ad partes S existat, quoniam OG tum major est quàm KG, patet velocitatem puncti descendentis, quo curva fit, in puncto O majorem esse velocitate motûs uniformis itidem descendentis, quo tangens efficitur; quia motus iste, continuò decrescens eodem per GM tempore, majus peragit spatium OG, quàm hic minimè decrescens, at in eodem tenore persistens, conficit, ipsum nempe spatium KG. Ergò cùm velocitas curvam describentis puncti quovis in curvæ puncto supra contactum versus A minor sit velocitate motûs per TP; quovis autem in puncto infra contactum eâdem major; liquet in ipso contactu M ei penitus exæquari. Q.E.D. Fig. 20.

XII Hujus conversa, consimili discursu, rem brevius exponendo, demonstretur. Nempe, si velocitas puncti descendentis ab A in aliquo curvæ puncto M æquetur velocitati, quâ punctum T uniformiter latum, rectam TP describeret tempore PM vel AC (vel sit velocitas motûs descendentis ad M ad velocitatem motûs transversi, ut TP ad PM) recta TMS curvam AMO tanget ad M.

Nam sumpto quovis in recta TS puncto K, & ductâ KG ad AZ parallelâ; quoniam versus partes AT velocitas ascendentis puncti, curvam efficientis, semper decrescit ab M ad O, illi verò ex hypothesi par velocitas puncti rectam MT gignentis haud decrescit ab M ad K, sitque tempus MG commune, erit spatium GO minus quàm GK; unde punctum K erit extra curvam. Item, quia versus alteras partes, velocitas descendentis, quo curva fit, increscit semper ab M versus O; æqualis autem ei velocitas, quâ recta MS fit, haud crescit ab M ad K; idémque fit rursus tempus MG, liquet rectam GO excedere rectam GK; & idcirco punctum K supra curvam existere. Quare manifestum est omnia dictæ rectæ puncta extra curvam existere; & eam proinde curvam contingere: Q.E.D.

XIII. Ex hisce statim *consectatur*, *hujusmodi curvas ad unum punctum ab una tantùm recta contingi.*

Nam tangere ponatur recta MT curvam AMO ad M; & si fieri potest altera MX etiam tangat. Ergò eodem tempore, eâdem velocitate (illâ scilicet, quæ puncti curvam describentis ad contactum M acquisitæ velocitati æquatur) describetur utraque recta XP, TM; quare XP, TP æquales erunt, totum & pars: Q.E.A. Ergò non tanget altera præter positam MT. || *Hanc speciatim de circulo demonstravit Euclides; de Sectionibus Conicis Apollonius*, de lineis aliis alii. Exhinc *Lucrum* emergit haud aspernandum, quòd eâdem operâ *propositiones de tangentibus inversa demonstrantur.* Nempe si determinetur angulus PMT (vel alter quispiam quem recta positione data cum tangente facit ad punctum curvæ designatum) aut si determinetur quantitas rectæ PT (vel similis cujuspiam alterius à puncto in data positione recta designato per tangentem interceptæ) eo tangens determinabitur. Et permutatim, si tangens situ determinetur, angulorum atque linearum ejusmodi quantitas indè dignoscetur. Adeóque parcetur operæ, qualem insumpserunt plerique tales propositiones inversas demonstrandi. Quod & eo magis observatu dignum est, quia sæpe talium inversarum propositionum una quàm altera longè promptiùs invenitur, atque faciliùs demonstratur. Cujus observationis, nisi longiùs evagari nollem, in promptu forent *Specimina.*

Eucl. III. 16, 17.
Apoll. I. 32, 33, 34, 35, 36.

XIV. E dictis infertur puncti descendentis velocitates in duobus quibusvis designatis curvæ punctis ad se proportionem habere reciprocè com-

compoſitam è rationibus applicatarum ab iſtis punctis ad rectam AZ (ipſi ſcilicet AY parallelarum) & interceptarum à tangentibus ad iſta puncta ac dictis applicatis (vel, rationem velocitatum æquari rationi applicatarum ex interceptarum ratione ſubductæ.)

Nempe ſi duæ rectæ MT, NX curvam tangent ad puncta M, N; protractæ ZA occurrentes in T, X; & applicentur NP, NQ ad YA parallelæ, velocitatum ad puncta, M, N proportio componetur è proportione ipſius TP ad PM, & ipſius QN ad QX. Nam velocitas in M ad velocitatem uniformem per AY ſe habet ut TP ad PM; & velocitas iſta uniformis ſe habet ad velocitatem in N, ut QN ad QX. Ergo velocitas in M ad velocitatem in N ex his duabus rationibus PP ad PM, & QN ad QX componetur Notetur à concurſu tangentium ductâ FE ad AY, parallelâ; fore TE, XE = TP. PM + QN. QX. Fig. 21.

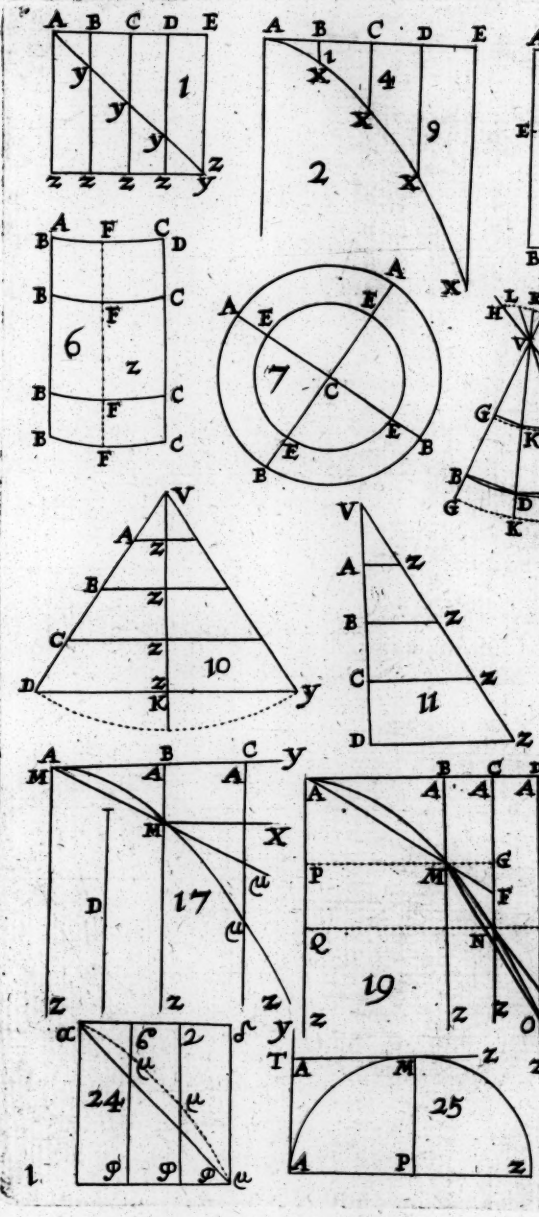
XV. Obiter interjicio generalem hinc & bene facilem conſequi *Problematis iſtius ſolutionem*, quam tanti fecit, & cui tantum laborem impendit *Galilæus*, quámque *Torricellius* pronunciat eum quàm optimè & ingenioſiſſimè reperiſſe. Rem ità proponit *Torricellius* (nam ipſe *Galilæus* ad manum non eſt) propoſitâ quâvis *parabolâ*, cujus *vertex* A oportet punctum aliquod ſublime reperire; è quo ſi grave cadat uſque ad A, & ex puncto cum impetu jam concepto horizontaliter convertatur, ipſa *propoſitam parabolam* deſcribat (notetur, quod motus deſcenſivus parabolam deſcribens non è puncto ſublimi, ſed ab ipſo puncto A cenſetur inchoare.) Huc recidit *Problema*, *Galilæi* ſuppoſitis inſiſtendo, ut determinentur particulares velocitates motuum, uniformis horizontalis, ſeu tranſverſi, & æqualiter creſcentis deſcenſivi quorum è compoſitione deſcripta concipitur exhibita parabola. Nos illud, quæcunque ſit creſcentis deſcenſivi motûs ratio, quicunque modus, generaliter exequemur; ſpecialem illum de *parabola* caſum in exemplum ſubjuncturi. || Reperiatur in recta AZ (quæ ſanè curvæ diameter eſt) punctum aliquod, ut P, à quo ſi ordinatim applicetur PM, & ducatur tangens MT, rectæ AZ occurrens in T, ſit intercepta TP æqualis ipſi PM; tum ſumatur in ZA protractâ recta AS = AP. Dico factum. Fig. 22.

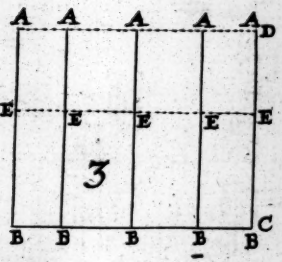
Nam quoniam SA = AP, concipiet mobile deſcendens ab S in A tantum impetum, quantum ab A ad P curvam deſcribendo (ponitur enim increſcentis velocitatis motus utrobique prorſus idem) iſte verò impetus æquatur impetui, quo mobile à T deſcendens uniformi motu percurret rectam TP, eodem tempore quo recta AZ uniformiter

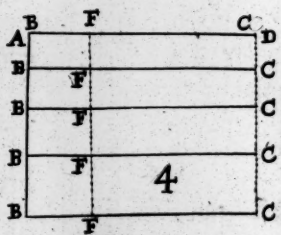
lata, perque motum istum in curva describenda conspirans, percurrit rectam PM. Cùm igitur sint TP, PM ex constructione pares, adeóque velocitates motuum, quibus simul peraguntur, æquales; etiam motus descensivus in P, vel M æquabitur motui transverso, curvam describenti, hoc est motûs ab S ad A velocitas in A eidem æquatur. Ergo punctum S est id ipsum, quod inveniri debuit, & absolutum est propositum. Fig. 22. Exemplo sit *parabola*, quæ facta concipitur ex motu uniformi horizontali, & descensivo pariter accelerato; tum punctum P ità facilè per *Analysin* investigatur. Sit recta R *data parabolæ rectum latus*. Est igitur ex *parabolæ* natura, $R \times AP = PMq = TPq$ (ex hypothesi modi nostri generalis.) Item, ex parabolæ nota proprietate est $TPq = 4APq$. Ergo est $R \times AP = 4APq$. Adeóque $R = 4AP$; vel $\frac{1}{4}R = AP = SA$. Nimirum ita *Galilæus* determinavit. In hoc autem casu puncta T, S coincidunt. Quòd si rursus gravia juxta *triplicatam temporum rationem* velocitate crescendo descendant, adeóque motus ipsorum talis cum uniformi transverso compositus *parabolam cubicam* describat, & sit R istius curvæ *parameter*, erit eo in casu $SA = \sqrt{\frac{Rq}{27}}$ nam ex hujusce curvæ proprietate est $Rq \, AP = PM$ cub. Et ex hujus regulæ generalis præscripto est $PM = TP$, adeóque PM cub. $= TP$ cub. Denique quoniam in hujusmodi *parabola* tangentis intercepta semper trisecatur à vertice (nimirum ut sit $AP = \frac{1}{3}TP$) est TP cub. $= 27$ AP cub. Erit igitur $Rq \, AP = 27 \, AP$ cub. Adeóque $Rq = 27 \, APq$; vel $\frac{Rq}{27} = APq = SAq$. In reliquis simili ratione procedentes assequemur propositum. Possent opinor & hinc nedum pleræque *Galilæi propositiones* huic affines, & hanc attingentes materiam utcunque deduci, sed & generaliores reddi, vel ad alia curvas omnigenas extendi. Verùm parco pluribus, hoc *specimine* (quoad ista) contentus; huc non nisi per transcursum adducto. Ad alia pergo prædictis cohærentia.

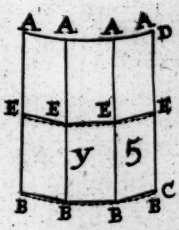
XVI. Si ad rectam lineam applicetur *plana superficies*, cujus singulæ quæque partes applicatis ad istam rectam parallelis interceptæ proportionales sint rectis ad rectam AY simpliciter divisam applicatis (ad AZ nempe parallelis.) Hujusce superficiei ad parallelogrammum æquealtum, super eadem basi constitutum, proportio proportionem indicabit ipsarum AP, TP, à puncto P vertici, tangentique interjectarum.

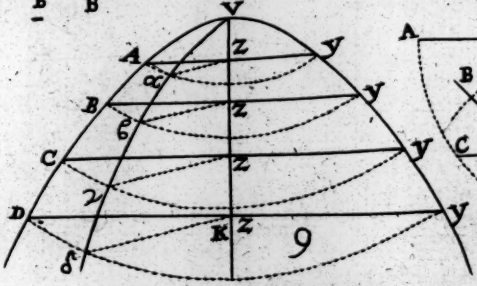
Ut

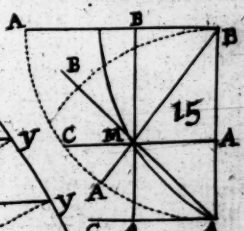

1
2
4
9
6
7
10
11
17
19
24
25

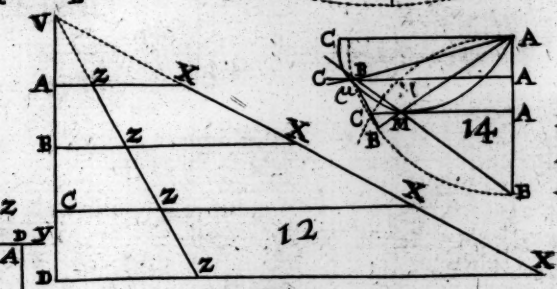


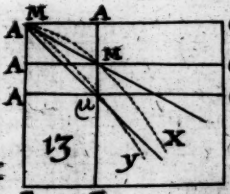


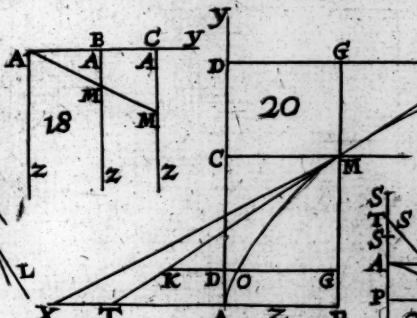


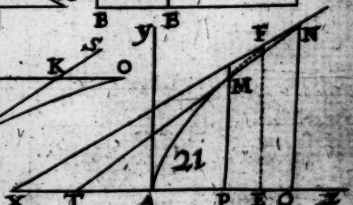


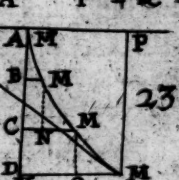












T: Crass sculpsit

Ut si ad rectam $\alpha\delta$ applicetur plana superficies $\alpha\delta\mu$, & utcunque divisâ A D punctis B, C, similitérque dicisâ rectâ $\alpha\delta$ punctis β, γ, fuerit ut B M ad C M ità superficies $\beta\alpha\mu$, ad superficiem $\gamma\alpha\mu$, & hoc in comparationibus universis taliter institutis contingat; *completo parallelogrammo* $\alpha\delta\mu\varphi$, *se habebit recta* A P *ad rectam* T P *ut superficies* $\alpha\delta\mu$ *ad parallelogrammum* $\alpha\delta\mu\varphi$. Et enim si recta $\alpha\delta$ commune tempus designare concipiatur, quo recta A D motu æquabili, rectáque D M motu continuè accelerato transiguntur, recta $\delta\mu$ bene designabit velocitatem hujus definiti temporis maximam, quam habet punctum descendens in curvæ puncto M infimo; hoc est velocitatem quâ recta T P uniformiter decurritur eodem tempore; quapropter (ut antehac commonstratum est.) *Parallelogrammum* $\alpha\delta\mu\varphi$ optimè *Spatium* repræsentabit, quod hâc eâdem permanente velocitate per totum tempus $\alpha\delta$ uniformiter describitur, hoc est ipsam rectam T P. Cùm igitur, ex hypothesis præstratæ conditione, figura $\delta\alpha\mu$ rectam D M, vel A P, repræsentet, erit ut figura $\delta\alpha\mu$ ad parallelogrammum $\alpha\delta\mu\varphi$, ità A P ad T P; cognitáque proinde modo quovis istâ proportione, simul hæc innotescet; & reciprocè. Exemplo res manifestior evadet uno, vel altero. Proposita curva sit *parabola quadratica*, seu in qua rectæ B M, C M se habent, ut quadrata ex A B, A C, hoc est ut quadrata ex $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$. Ergò si figura $\alpha\delta\mu$ sit triangulum, id optimè quadrabit huic negotio. Nam eo supposito semper triangula $\beta\alpha\mu$, $\gamma\alpha\mu$ proportionalia erunt quadratis ex $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, hoc est rectis B M; C M. Quoniam verò triangulum $\delta\alpha\mu$ parallelogrammi $\delta\alpha\varphi\mu$ est subduplum, erit recta A P quoque rectæ T P subdupla; quod ità se habere demonstratum habetur in *conicis elementis*, & passim agnoscitur. Sit rursus curva A M M *parabola cubica*; & quoniam in ea rectæ B M, C M se habent ut cubi rectarum A B, A C, hoc est ut cubi rectarum $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$; & si *superficies* $\alpha\delta\mu$ *fuerit complementum semiparabolicæ quadraticæ portionis, trilinea* $\alpha\beta\mu$, $\alpha\gamma\mu$ *cubis ex* $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ *proportionalia erunt* (ut à *Pappo*, ac aliis ostenditur, & ex *Archimidea parabola dimensione* quàm facillimè deducitur) itaque negotio proposito quàm rectissimè adaptetur *parabola quadratica*; cúmque constiterit aliundè tum figuram $\alpha\delta\mu$ subtriplam fore parallelogrammi $\alpha\delta\mu\varphi$; erit etiam juxta regulæ jam assignatæ præscriptum recta A P quoque subtripla rectæ T P. De qua conclusione satis convenit inter *Geometras*.

Fig. 23, 24. *Hæc posthàc γεωμετρικίστερον demonstrata habentur.*

XVII.

XVII. Huic ſuppar modus dictas rectas AP, TP comparandi tali *Theoremate* continetur: Si ad rectam aliquam lineam (hoc eſt ad ejus ſingula quæque puncta) applicentur rectæ lineæ parallelæ, ad rectam AD conſimiliter diviſam applicatarum differentiis proportionales, reſultantis hinc plani ad parallelogrammum æque altum, ad eandemque baſin poſitum, rectarum AP, TP proportionem exhibebit. Ut ſi rectæ AD, $\alpha\delta$ ſimiliter (in partes ſcilicet æquales indefinitè multas) dividantur; & rectæ $\zeta\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ rectis BM, NM, OM (quæ differentiæ ſunt rectarum ad AD applicatarum, incipiendo à puncto A) proportionales ſint, erit ut figura $\alpha\delta\mu$ ad parallelogrammum $\alpha\delta\mu\varphi$, ità AP ad TP. Cùm enim recta quæpiam ex applicatis ad AD; puta *v. g.* DM æquetur omnibus ſeipsâ minorum differentiis (ipſis nempe BM, NM, OM) & trilineum $\alpha\delta\mu$ conſtituatur è rectis $\zeta\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ eâdem proportione creſcentibus; ut & recta CM æquatur ipſis BM, NM; & ei reſpondens trilineum $\alpha\gamma\mu$ quaſi conflatur è parallelis $\zeta\mu$, $\gamma\mu$ pari ratione creſcentibus; & hoc ſemper eveniat; omninò patet trilinea $\alpha\delta\mu$, $\alpha\gamma\mu$, $\alpha\zeta\mu$ rectis DM, CM, BM proportionari; proindéque modum hunc in priorem recidere; nec ab eo reipsâ differre. Notetur autem hìc rectas $\zeta\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ velocitates repræſentare, quas punctum mobile curvam delineans obtinet in reſpectivis ejus punctis M; ut & trilinea $\alpha\zeta\mu$, $\alpha\gamma\mu$, $\alpha\delta\mu$ velocitates aggregatas exhibent ab initio ad definita reſpectiva temporis inſtantia; quibus (ut jam olim præmonitum) reſpondentia ſpatia BM, CM, DM proportionantur.

Fig. 23, 24.

XVIII. E ſupradictis porrò conſectatur, quòd ſi *Circulus*, *Ellipſis*, ejuſmodique curvæ recurrentes hoc progenitæ concipiantur modo, punctum eas deſcribens infinitam in recurſûs puncto velocitatem habebit. Nempe ſi quadrans AFM ità generetur; quoniam tangens TM diametro AZ eſt parallela, nec illa proinde cum hac niſi ad infinitam diſtantiam convenit; ergò velocitas in M ad velocitatem uniformis motûs per AY ſe habebit, ut infinita recta ad ipſam PM; unde velocitas iſta ad M prorſus infinita ſit oportet. Ità quidem quoad hujuſmodi curvas; at quoad alias ad infinitum ſenſim continuatas (quales *parabolæ* & *hyperbolæ*) deſcendentis puncti velocitas in quovis deſignato curvæ puncto finita eſt. Verùm his omiſſis ad alias propoſitæ curvæ proprietates exponendas progrediamur.

Fig. 25.

II. *precd.*

LECT. V.

LECT. V.

IN deducendis è propoſitâ generatione curvarum affectionibus etiamnum progredimur.

I. *Anguli, qui fiunt ab applicatis & tangentibus ad diverſa curvæ puncta, ſibimet inæquales ſunt; & minores ſunt illi qui puncto A (ſeu vertici) propiores ſunt.*

Tangant rectæ TM, XN; & ad AY parallelæ ſint MP, NQ; dico fore angulum PMT minorem angulo QNX.

Nam producta recta TM occurret ipſi QN extra curvam protractæ, puta ad E. Item ipſa XN ſecabit applicatam PM extra curvam, puta ad H. Manifeſtum eſt autem cùm puncta H, N ſint ad alias, ac alias partes rectæ ME, rectas ME, NH ſeſe interſecare inter parallelas PH, QE; quare major eſt angulus externus QNX interno QET, hoc eſt angulo PMT: Q.E.D. Fig. 26.

II. Hinc *poriſmatis* loco habetur *tangentes ſe interſecare inter ordinatim applicatas per puncta contactuum; velut ad F, inter PM, QN protenſas.*

III. Item *angulum PTM angulo QXN majorem eſſe*; (externum ſcilicet interno.)

IV. Item patet vertici propiores applicatas (proindéque rectas quaſvis aliis parallelas) curvæ obliquiùs incidere quàm remotiores.

Cæterùm iſta jam olim de *Sectionibus Conicis* oſtenderat *Apollonius*, ut in edito nuper VI *conicorum libro* eſt videre.

V. In figura præcedente (poſito applicationis angulum TAY rectum eſſe, vel obtuſum) *dico curvæ arcum MN rectâ NH, majorem eſſe; rectâ verò ME minorem.*

Nam

Nam connectatur ſubtenſa MN, ducatúrque recta NR ad ZA parallela. Et quoniam angulus XPH non minor eſt recto, erit, eo major externus, NHP obtuſus. Ergò recta NM major eſt quàm NH. Itaque magis arcus, arcus NH major eſt quàm ipsâ NH: Q.E.D.

Item, quoniam ang. RNE ipſi XQE par haud minor eſt recto, erit RE ⊏ RN. quare MR + RE ⊏ MR + RN. hoc eſt ME ⊏ MR + RN. Eſt autem (ex *Archimedæis* aſſumptis) MR + RN ⊏ arc. MN. ergò magis eſt ME ⊏ arc. MN.

VI. Perutilis eſt hæc propoſitio in *tangentium demonſtrationibus expediendis*. Etenim hinc conſectatur, ſi arcus MN indefinitè parvus ponatur, ejuſce loco alterutram tangentis particulam ME, vel NH tutò ſubſtitui.

Speciminis hîc loco *methodum proponam generalem cycloidum omnium, & conſimili modo deſcriptarum curvarum tangentes determinandi*, hinc petitâ demonſtratione munitam.

Fig. 27. Recta AY ſibi parallelè deportata quamcunque curvam ad eaſdem partes convexam aut cavam, APX perambulet uniformi motu (ſcilicet ut æquales curvæ partes æqualibus tranſigat temporibus) eodémque ſimul tempore punctum aliquod ab A per AY etiam uniformiter feratur; ab hoc puncto taliter moto progignetur curva AMZ, cujus ad datum quodcunque punctum M tangentem oportet determinare. Ut hoc fiat, ducatur recta MP ad AY parallela, curvam APX ſecans in P; pérque P ducatur recta PE curvam APX contingens; huic verò per M ducatur parallela MH; ínque hac ſumatur punctum quodpiam R, & ducatur RS ad PM parallela; tum fiat ut curva AP ad rectam PM (hoc eſt ut unus motus uniformis ad alterum) ità MR ad RS; & connectatur MS. hæc curvam AMZ continget. Sumatur enim in hac curva punctum quodvis Z, per quod ducatur recta ZX ad MP parallela, ſecans curvam APX in X, ejúſque tangentem in E; & huic parallelam MR in H; ipsámque demum MS in K. Sit autem primò punctum Z ſupra M verſus A; unde recta PE ⊐ arc PX. adeóque PA.PE ⊏ arc PA.PX :: PM.PM — XZ :: PM.EH — XZ :: PM.ZH — EX ⊏ PM.ZH. quare permutatim erit PA.PM ⊏ PE.ZH. eſt autem PA.PM :: MR.RS :: MH.KH :: PE.HK. ergò PE.HK. ⊏ PE.ZH. quare HK ⊐ ZH. eſt autem punctum H extra curvam AZM; ob EZ ⊐ XZ ⊐ PM = EH. ergò palàm eſt punctum K extra curvam AZM exiſtere. Sit verò ſecundò punctum

punctum Z infra punctum M ; erit tum recta P E major arcu P X; unde arc P A. P E ⊐ arc P A. P X :: P M. X Z — P M : : P M. X Z — E H : : P M. X E + X Z ⊐ P M. H Z. & viciſſim P A. P M ⊐ P E. H Z. Verum ut priùs) eſt P A. P M :: P E. H K. ergò P E. H K ⊐ P E. H Z ; propterea̅que H K ⊏ H Z ; rurſus itaque liquet Punctum K extra curvam exiſtere. Tota proinde recta M K Z extra curvam verſatur ; & eam tangit ad M : Q. E. D. In tranſcurſu hoc . ad alias curvæ noſtræ paſſiones revertamur. Fig. 27.

VII. Si tangenti cuipiam (ut ipſi M T) parallela ducatur quæpiam E F (à puncto nempe quopiam E in recta infra punctum T ſumpto) hæc curvæ occurret.

Si enim infra punctum M in curva ſumatur punctum quodlibet, & ab eo duci concipiatur curvam tangens recta ; huic occurret tangens T M infra ordinatam P M . ergò recta E F eidem occurret ; at curvam priùs tranſiliat oportet . ergò liquet Propoſitum. Fig. 28.

VIII. Eâdem operâ patet, ſi punctum aſſumptum E puncto T, & vertici A interjiciatur, rectum E F curvæ bis occurſuram, tam ſupra quàm infra contactum M.

Operosè conniſus eſt *Apollonius* hæc de *Sectionibus Conicis* oſtendere. *Con. I.* 27, 28.

Cæterùm ad penitus determinandos occurſuum locos *Specialis modus ſeu ratio motuum deſcendentis atq; tranſverſi cognoſci debet* ; tunc eos *Analyſis* ſtatim prodet.

IX. Si duæ rectæ qnævis (H M, K N) ad curvam propoſitam æqualiter inclinentur (hoc eſt æquales cum ejus ad occurſus tangentibus (puta cum ipſis M T, N X) angulos efficiant) hæ extrorſum divergent, ſeu ad partes E F productæ concurrent. Fig. 29.

Nam ducatur ſubtenſa N M ; hæc utiq; ſecundum antedicta cum ipſa A Z conveniet, puta ad O. Eſt ergò ang O M H ⊐ (ang. T M H = ang. X N K ⊐) ang . O N K. ergo ang . H M N + M N K ⊏ 2 rect . ergò rectæ H M, K N concurrunt ad partes E F. Limitandum eſt hoc, intelligendo pares angulos H M A, K N A ad eaſdem partes veſari ; ſeu alterum alteri fore externum interno . alias cotnrà eveniet.

X. Si fuerit recta H M *curvæ* perpendicularis (hoc ejus tangenti M T) & in hac ſumatur quæpiam definita H M ; erit H M minima rectarum omnium, quæ à puncto H duci poſſunt ad curvam. Fig. 30. *Apoll. V.* 38 &c.

Ducatur enim quævis H O ; hæc tangenti priùs occurret, puta ad R. liquet H R majorem esse quàm H M ; multóq; magis esse H O ⊏ H M,

XI. Hinc *Circulus Centro* H per M descriptus *curvam* continget.

XII. Etiam inversè, si H M minima sit omnium quæ ab H ad curvam duci possunt, erit H M curvæ perpendicularis.

Nam quoniam H M minima ponitur, circulus centro H, intervallo quovis H S, majori quàm H M, curvam secabit, & proinde tangentem M T, hanc puta in R. ergò quum sit H R ⊏ H M, non erit angulus H R M rectus. idem de punctis omnibus in recta T M evidens est. ergò tangenti perpendicularis non alibi quàm in punctum M cadit.

Fig. 31. XIII. Quinetiam si recta H M minima sit omnium quæ ab H duci possunt, eíq; perpendicularis sit recta T M; hæc curvam tanget.

Nam tangat alia, (si fieri potest) X M ; erit igitur X M ad H M perpendicularis. Unde pares erunt anguli H M X, H M T, totum & pars Q. E. A.

Fig. 32. XIV. Dico porrò minimæ H M propiorem H N remotiore H O minorem esse.

Nam ducatur subtensa M N ; hæc producta curvam transgredietur, & ipsam H O secabit, puta in R. & quoniam Angulus H M R obtusus est (major illo nempe, quem tangens cum H M constituit ad M) erit H N R magis obtusus, adeôq; recta H R ⊏ H N & magis H O ⊏ H N.

XV. Hinc perspicuum est Circulum quemvis Centro H descriptum, uno tantùm ad eandem puncti M partes puncto curvæ occurrere ; nec omnino pluries igitur, quàm in duobus punctis.

Fig. 33. XVI. Perpendiculari H M parallelæ sint rectæ I N, K O ; harum propior I N remotiore K O rectiùs incidet.

Nam per N, O ducantur ipsi curvæ perpendiculares E N, F O ; hæ cum ipsa H M intra curvam convenient, puta ad R, & P ; sibi verò ipsis in Q.

Liquet jam esse ang. F O K = ang. F P H ⊏ ang. P R Q = ang. N R H = ang. E N J. Cùm ergò sit ang. F O K major angulo E N J, liquet propositum. XXXVII.

XVII. *Si à puncto quopiam H in perpendiculari H M assumpto ducantur ad curvam rectæ H N, H O; harum propior H N, remotiore H O rectiùs incidet.*

Nam ducantur E N, F O curvæ perpendiculares, & I N, K O ad ipsam H M parallelæ. Est igitur ang. F O K ⊏ ang. E N I. Item ang. O H M ⊏ ang. N H M. hoc est ang. K O H ⊏ ang. I N H. quare ang. F O K + K O H ⊏ ang E N I + I N H. hoc est ang. F O H ⊏ ang. E N H. Unde constat Propositum. Fig. 34.

XVIII. Hinc patet à perpendiculari progrediendo, (ab uno nempe puncto H) incidentium *obliquitatem* crescere, donec ad illam devenitur, quæ *curvam* tangit, omnium obliquissima.

XIX. Porrò si introrsum jam sumatur punctum H, & ab eo incidens H M sit omnium curvæ incidentium minima; erit H M *curvæ* perpendicularis, seu tangenti M T. Fig. 35.

Nam dic aliam M R tangenti perpendicularem esse. ergò H R ⊐ H M. & magis H O ⊐ H M. quare H M non est minima contra *Hypothesin*. *Apoll. V.* 32.

XX. Item si recta H M sit omnium ab H curvæ incidentium *maxima*, erit H M curvæ perpendicularis. *Apoll. V.* 29.

Nam Circulus Centro H per M descriptus extra curvam totus cadet. ergò si recta M T Circulum tangat, hæc magis extra curvam cadet, eamq; proinde continget. Est autem ang. H M T rectus. ergò liquet. Fig. 36.

XXI. Hinc si M T sit minimæ vel maximæ H M perpendicularis; hæc *curvam* tanget. *Apoll. V.* 30, 39.

Nam si dicatur alia M X tangere; erit ideò ang. X M H rectus, & par angulo T M H: Q. E. A.

XXII. Exhinc si recta Y M non sit curvæ perpendicularis; in ea nulla sumi potest *maxima*, vel *minima*.

Nam si sumi posset, esset ex eo ipso Y M curvæ perpendicularis contra *Hypothesin*. *Apoll. V.* 31, 47.

XXIII. Si H M sit incidentium minima, & intra ipsam sumatur punctum quodpiam I; erit etiam I M minima. *Apoll. V.* 30.

Fig. 37. Cùm enim *circulus centro* H per M descriptus *curvam* intrórsum tangat, etiam magìs *circulus centro* I *descriptus* introrsum tangat. unde liquet.

XXIV. Etiam si H^M sit incidentium maxima, & extra ipsam accipiatur punctum quodpiam I, erit I^M maxima.

Cùm enim *Circulus Centro* H *per* M *descriptus curvam* extrorsum
Apoll. V. 39. contingat, etiam potiori jure *Circulus Centro* I *per* M *descriptus eandem extrorsus continget.* unde constat *Propositum.*

Cæterùm *minimarum & maximarum propior determinatio pendet ex speciali curvæ natura.*

De hac autem Tabula jam manum auferemus; nec enim impræsentiarum hujusmodi pleraq; complecti profitemur. Instituto nostro sufficit hactenus generalis cujusdam curvarum proprietates comprehendentis Doctrinæ *specimen* exhibuisse: qualis certè, plenior & perfectior, *haud exiguum videtur rebus Geometricis* (quæ nempe circa *curvarum proprietates & affectiones* plurimùm occupantur) *compendium allatura.* Nè dicam culpæ agnatum videri, *Logicaq;* Regulis haud admodum congruere, quæ toti cuipiam generi conveniunt, & quæ de communi quadam origine manant, ea quibusdam partibus adscribere, vel ex angustiori fonte derivare. *Plura* forsan, & *abstrusiora* proferemus aliquando. Nunc his supersedemus.

LECT. VI.

LECT. VI.

AD eaſdem partes vergentium curvarum, è communi quadam generatione deductas, generales aliquot affectiones jam antea dudum expoſui; illas præſertim, quas à veteribus *Geometris* obſervaram ſpecialibus, quas ipſi tractant, curvis applicari. Jam non ingratum facturus videor, ſi complures alias (abſtruſiores quidem illas, at non injucundas prorſus, aut inutiles) appoſuero; pro meo more quàm conciciſſimè demonſtratas, eâ tamen ratione quoad potero, quæ cumprimis ſcientifica videtur, hoc eſt quæ nedum concluſionum veritatem aſſerit, at fontes etiam aperit, unde illa promanat. Verſantur autem præcipuè quæ proferemus, partim *circa tangentium abſque calculi moleſtia vel faſtidio inveſtigationem ſimul ac demonſtrationem expeditam* (è ſimplicioribus nempe vulgatioribúſque perplexiora minúsque perſpecta deducendo) *partim circa multarum magnitudinum dimenſiones, tangentium deſignatarum ope, quam promptiſſimè determinandas*; quæ materiæ cùm præ Geometricis aliis quodammodò difficiles videntur, tum non penitus adhuc (ſicut altæ quædam) occupatæ vel exhauſtæ ſunt, ad hunc ſaltem modum quod ſciam nondum tractatæ. Quin è veſtigio rem aggredimur, *Lemmatica* quædam utcunque, quorum in reliquis clarius & breviùs oſtendendis aliquem proſpicimus uſum, prælibantes.

II Sit *angulus rectilineus* A B C, & datum punctum D, ſit item linea O D O talis, ut per D ductâ quâvis rectâ D N, ſit anguli lateribus intercepta M N æqualis à puncto D, & linea O D O interceptæ D O; erit linea O D O *Hyperbola*. Fig. 38.

Nam ducatur D L ad C B parallela occurrénſq; ipſi A B in L; & in protracta B L ſumatur L Z = L B; ducatúrq; Z S ad B C parallela; item ducatur O K ad B Z parallela. Et ob poſitam D O = M N; erit H O = B N; ergò quum ſit D H. H O :: (D L. L N :: D L — D H.

DH.LN—HO::LH.LB::) LH.HK. erit DH × HK = HO × LH; hoc eſt DL × HK — LH × HK = KO × LH—HK × LH. unde erit DL × HK = KO × LH. vel ZL × LD = ZK × KO. ergò conſtat lineam ODO eſſe *Hyperbolen*, cujus *Aſymptoti* ZA, ZS. Breviùs hoc oſtendi poſſet, producendo rectam NDS. Nam eſt DS = DM = DO ± OM = NM ± OM = ON. Similiter quartam & nonam breviùs demonſtres licet.

Fig. 38. Quinimò ſi MN ad DO quamvis eandem perpetuò rationem ponatur habere (puta datam R ad S) etiam linea ODO *Hyperbola* erit; Nempe ſi tum fiat R.S::LB.LZ; & R.S::DL.DE; & per Z ducatur ZS ad BC; ac per E tranſeat RE ad ZA parallela, cum ZS conveniens in Y; erunt YR, YS dictæ *Hyperbolæ aſymptoti* quod jam ſufficerit innuiſſe.

Hinc in tranſcurſu noto facilè confici *Problema (quo problematum conſectiones iſtæ Archimedeæ, ac Vietæ ope primæ Conchoidis peractæ, ad Sectiones conicas rediguntur)* Per datum punctum D rectam lineam ducere, ſic ut anguli dati ABC lateribus intercepta ductæ rectæ pars æquetur datæ T. Nam deſcriptâ hyperbolâ ODO; centro D, intervallo datam T æquante deſcribatur circulus POQ *hyperbolam* interſecans in O; & producatur DON; fiétq; MN = DO = T. Modus autem hic generalior eſt, & concinnior eo, quem in *Opticis* tradidimus.

Fig. 39. IV. Sit angulus ABC, et punctum datum D, ſit etiam linea OBO talis, ut per D ductâ quàpiam rectâ DN, ſit anguli lateribus intercepta MN ad rectâ BC curvâque OBO interceptam MO in eadem ſemper ratione (puta X ad Y;) erit linea OBO *hyperbola*.

Fig. 39. Ducatur enim recta DL ad CB parallela, ipſi AB occurrens in L; ſecentúrque DL, BL punctis E, F, ut ſit DL.DE::X.Y::BL.BF; tum per E ducatur recta ER, ad BA; & per F recta FS ad BC parallela; concurrántque rectæ ER, FS puncto Z; denuò per punctum O ducatur OH ad AB parallela. Jam ob DL.DH::LN.HO::LB + BN.HO::DE × LB + DE × BN.DE × HO. item DL × KO = DE × BN (nam DL.DE::MN.MO::BN.KO) & DE × LB = DL × BF (ob DE.DL::BF.LB;) erit DL.DH::DL × BF + DL × KO. DE × HO; hoc eſt DL × BF + DL × KO. DH × BF + DH × KO::DL × BF + DL × KO.

DE

DE×HO ergò DH×BF+DH×KO=DE×HO; hoc est DH×BF+DH×HO—DH×BL=DE×HO; transponendo igitur est DH×HO—DE×HO=DH×BL—DH×BF. hoc est EH×HO=DH×FL; vel EH×GO+EH×HG=DE×FL+EH×FL; quare, demptis æqualibus, est EH×GO=DE×FL; vel ZG×GO=DE×FL; cum itaque DE×FL sit quid determinatum, constat lineam OBO esse hyperbolam, cujus asymptoti ZR, ZS. Fig. 39.

V. Si MO capiatur ad alteras rectæ BC partes, etiam DE. BF ad alteras punctorum D, B partes accipi debent; uti Schema monstrat; nec abluditmodus demonstrandi. Fig. 40.

VI. Consectarium. Si recta BQ angulum ABC secet, pérque punctum D ducantur utcunque duæ rectæ MN, XY rectam BQ intersecantes punctis OP (quorum utique sit O propius ipsi B) erit MN.MO⊐XY.XP. Nam per O descripta concipiatur *hyperbola* VOB (qualem jam mox attigimus, sic ut interceptæ rationem habeant illam quam MN ad MO) erit igitur MN.MO::(XY.XV)⊐XY.XP. Fig. 41.

Coroll. Dividendo est NO.MO⊐YP.PX.

VII. Quinimò si plures lineæ BQ, BG angulum ABC secent; & à puncto D projiciantur rectæ DN, DY (quæ rectas alteras intersecant ut vides; quarúmque DN puncto B vicinior;) erit NE.MO⊐YF.VX. Fig. 42.

Nam NE.EO⊐YF.FV; & EO.OM⊐FV.VX. igitur ex æquo est NE.OM⊐YF.VX. ‖

VIII. Etiam exindè patet, per B (ad partes alterutras) rectam duci posse; ità ut è D eductarum partes ab illa rectáque BC ad interceptas à rectis BA, BC rationem habeant minorem quâpiam datâ.

Nam sumatur PQ=PZ; ergò connexa BQ *hyperbolam* OBO tangit; & liquet à rectis BQ, BC interceptas ad interceptas à BC, BA minorem rationem habere, quàm habent interceptæ ab hyperbolâ OBO & recta BC ad eadem; hoc est minorem datâ quâpiam.

IX. Sit rursum angulus rectilineus ABC, & punctum D; item Fig. 43.
linea.

DH.LN—HO::LH.LB::) LH.HK. erit DH × HK = HO × LH; hoc est DL × HK — LH × HK = KO × LH — HK × LH. unde erit DL × HK = KO × LH. vel ZL × LD = ZK × KO. ergò constat lineam ODO esse *Hyperbolen*, cujus *Asymptoti* ZA, ZS. Breviùs hoc ostendi posset, producendo rectam NDS. Nam est DS = DM = DO ± OM = NM ± OM = ON. Similiter quartam & nonam breviùs demonstres licet.

Fig. 38. Quinimò si MN ad DO quamvis eandem perpetuò rationem ponatur habere (puta datam R ad S) etiam linea ODO *Hyperbola* erit; Nempe si tum fiat R.S::LB.LZ; & R.S::DL.DE; & per Z ducatur ZS ad BC; ac per E transeat RE ad ZA parallela, cum ZS conveniens in Y; erunt YR, YS dictæ *Hyperbolæ asymptoti* quod jam sufficerit innuisse.

Hinc in transcursu noto facilè confici *Problema (quo problematum confectiones istæ Archimedeæ, ac Vietæ ope primæ Conchoidis peractæ, ad Sectiones conicas rediguntur)* Per datum punctum D rectam lineam ducere, sic ut anguli dati ABC lateribus intercepta ductæ rectæ pars æquetur datæ T. Nam descriptâ hyperbolâ ODO; centro D, intervallo datam T æquante describatur circulus POQ *hyperbolam* intersecans in O; & producatur DON; fiétq; MN = DO = T. Modus autem hic generalior est, & concinnior eo, quem in *Opticis* tradidimus.

Fig. 39. IV. Sit angulus ABC, et punctum datum D, sit etiam linea OBO talis, ut per D ductâ quâpiam rectâ DN, sit anguli lateribus intercepta MN ad rectâ BC curvâque OBO interceptam MO in eadem semper ratione (puta X ad Y;) erit linea OBO *hyperbola.*

Fig. 39. Ducatur enim recta DL ad CB parallela, ipsi AB occurrens in L; secentúrque DL, BL punctis E, F, ut sit DL.DE::X.Y::BL.BF; tum per E ducatur recta ER, ad BA, & per F recta FS ad BC parallela; concurrántque rectæ ER, FS puncto Z; denuò per punctum O ducatur OH ad AB parallela. Jam ob DL.DH::LN.HO::LB + BN.HO::DE × LB + DE × BN.DE × HO. item DL × KO = DE × BN (nam DL.DE::MN.MO::BN.KO) & DE × LB = DL × BF (ob DE.DL::BF.LB;) erit DL.DH::DL × BF + DL × KO. DE × HO; hoc est DL × BF + DL × KO. DH × BF + DH × KO::DL × BF + DL × KO.

DE

DE × HO ergò DH × BF + DH × KO = DE × HO; hoc eſt DH × BF + DH × HO — DH × BL = DE × HO; tranſponendo igitur eſt DH × HO — DE × HO = DH × BL — DH × BF. hoc eſt EH × HO = DH × FL; vel EH × GO + EH × HG = DE × FL + EH × FL; quare, demptis æqualibus, eſt EH × GO = DE × FL; vel ZG × GO = DE × FL; cum itaque DE × FL ſit quid determinatum, conſtat lineam OBO eſſe hyperbolam, cujus aſymptoti ZR, ZS. Fig. 39.

V. Si MO capiatur ad alteras rectæ BC partes, etiam DE. BF ad alteras punctorum D, B partes accipi debent; uti Schema monſtrat; nec abludit modus demonſtrandi. Fig. 40.

VI. Conſectarium. Si recta BQ angulum ABC ſecet, pérque punctum D ducantur utcunque duæ rectæ MN, XY rectam BQ interſecantes punctis OP (quorum utique ſit O propius ipſi B) erit MN.MO ⊐ XY.XP. Nam per O deſcripta concipiatur *hyperbola* VOB (qualem jam mox attigimus, ſic ut interceptæ rationem habeant illam quam MN ad MO) erit igitur MN.MO :: (XY.XV) ⊐ XY.XP. Fig. 41.

Coroll. Dividendo eſt NO.MO ⊐ YP.PX.

VII. Quinimò ſi plures lineæ BQ, BG angulum ABC ſecent, & à puncto D projiciantur rectæ DN, DY (quæ rectas alteras interſecant ut vides; quarúmque DN puncto B vicinior;) erit NE.MO ⊐ YF.VX. Fig. 42.

Nam NE.EO ⊐ YF.FV; & EO.OM ⊐ FV.VX. igitur ex æquo eſt NE.OM ⊐ YF.VX. ‖

VIII. Etiam exindè patet, per B (ad partes alterutras) rectam duci poſſe; ità ut è D eductarum partes ab illa rectáque BC ad interceptas à rectis BA, BC rationem habeant minorem quâpiam datâ.

Nam ſumatur PQ = PZ; ergò connexa BQ *hyperbolam* OBO tangit; & liquet à rectis BQ, BC interceptas ad interceptas à BC, BA minorem rationem habere, quàm habent interceptæ ab hyperbolâ OBO & recta BC ad eaſdem; hoc eſt minorem dâtâ quâpiam.

IX. Sit rurſum angulus rectilineus ABC, & punctum D; item Fig. 43.

linea

linea OOO talis, ut si è D utcunque ducatur recta DO, secans
Fig. 43. anguli latera punctis M, N, habeat DM ad NO semper eandem rationem (puta X ad Y) erit etiam linea OOO hyperbola.

Nam ducatur DL ad BC parallela; sitque DL. DE :: X. Y; & per E ducatur ER ad AB parallela; secans BC in Z; demum per O ducatur OH ad BA parallela.

Est jam DL. DE :: DM. NO :: LM. GO (ob similia triangula DLM, NGO) :: LM × DH. GO × DH item DL × HO = LM × DH (ob DL. LM :: DH. HO) quare DL. DE :: DL × HO. GO × DH hoc est DL × HO. DE × HO :: DL × HO. GO × DH adeóq; DE × HO = GO × DH. hoc est DE × HG + DE × GO = GO × DE + GO × EH quare (communi sublato) est DE × HG = GO × EH; seu DE × HG = GO × ZG. Patet itaque curvam OOO esse *hyperbolam* cujus *asymptoti* ZR ZC.

Coroll. Si ratio data sit æqualitatis (ceu DM = NO,) ipsæ AB, CB asymptoti erunt.

Sequentia quædam, quia magis id perspicuum videtur, Algebricè monstrabimus.

X. Esto positione data recta ID, in qua punctum designatum D;
Fig. 44. sit item curva DNN talis ut in ID sumpto quopiam puncto G, & ductâ rectâ GN ad positionem datam IK parallelâ, tum adsumptis determinatis rectis m, b; positisq; DG = x, & GN = y; sit constantèr $my + xy = \frac{m}{b}xx$; erit linea DNN *hyperbola*; quæ sic determinatur; sumantur DM, & DO (hinc indè) pares ipsi m; & per M ducatur ML ad IK parallela, factóq; $b . m :: m . MQ$; sit $MZ = 2\,MQ = \frac{2mm}{b}$; tum per Z, O traducatur recta ZT; erunt ZM, ZT asymptoti.

Ducatur enim ZS ad MO parallela, cui occurrat NG in R (quæ & ipsam ZT secet in P). & connectatur DQ. Est ergò PN = RG + GN − RP. Verùm est MD. MQ :: ZR (MG). RP; hoc est $m . \frac{mm}{b} :: m + x . RP = \frac{mm}{b} + \frac{mx}{b}$ adeóq; RG − RP $= \frac{mm}{b} - \frac{mx}{b}$ ergò $PN = \frac{mm - mx}{b} + y$. Unde PN × MG $= \frac{m^3}{b} + my + xy - \frac{mxx}{b}$ Verùm (ex hypothesi) est my +

$+xy-\frac{mxx}{b}=o$. ergò $PN\times MG=\frac{m^3}{b}=MD\times ZQ$. vel $PN.ZQ::(MD.MG::)\ QD.ZP$. Quapropter eſt $PN\times ZP=ZQ\times QD$. Unde palàm eſt curvam D N N eſſe hyperbolam, cujus aſymptoti Z M, Z T. Fig. 44.

XI. Notetur; ſi æquatio ſit $my-xy=\frac{m}{b}xx$; eadem habebitur *hyperbola*; tunc ſolùm puncta G ad partes D M ſumuntur. Quin & ſi æquatio ſit $xy-my=\frac{m}{b}xx$; puncta G ultra M capiendo, proveniet *hyperbola*, huic ipſi *conjugata*.

XII. Sit Triangulum B D F; & linea D N N talis, ut ductâ utcunque R N ad B D parallelâ (quæ lineas B F, D F, D N N ſecet punctis R, G, N) connexâque rectâ D N; ſit perpetuò D N proportione media inter R N, N G; erit linea D N N *hyperbola*. Fig. 45.

Per D ducatur D K ad D B perpendicularis (ſecans ipſam R N in E) & ſit F H ad D B parallela; vocenturque $DB=b$; $DF=d$; $FH=f$; tum $DG=x$; & $GN=y$; Eſtque $d.f::x.\frac{fx}{d}=GE$, unde $\frac{2fxy}{d}+xx+yy=2EG\times GN+DGq+GNq=DNq$. Porrò eſt $d.b::FG.GR::d-x.RG=b-\frac{bx}{d}$. Unde $RN=b-\frac{bx}{d}+y$. Et ideò $by-\frac{bxy}{d}+yy=RN\times NG=DNq=\frac{2fxy}{d}+xx+yy$. quare $by-\frac{bxy}{d}=\frac{2fxy}{d}+xx$. quam æquationem ordinando fit $\frac{db}{2f+b}y-yx=\frac{d}{2f+b}xx$. quòd ſi ponatur $m=\frac{db}{2f+b}$; erit $my-xy=\frac{m}{b}xx$. Unde liquet D N N eſſe *hyperbolam*, qualis habetur in præcedente determinata,

Not. Si angulus D G N rectus fuerit, evaneſcente tum $f=o$, erit

$d = m$; vel $dy - xy = \frac{d}{b}xx$. Aliaquædam hîc (nonnulla forsan παρέργως) inseremus.

Fig. 46. XIII. Sit positione data recta I D; sit item curva D N N talis, ut in I D sumpto puncto quopiam G, ductâque rectâ G N ad positionem datam I K parallelâ; sumptísque determinatis lineis g, m, r; positísque $DG = x$, & $GN = y$; sit perpetim $yx + gx - my = \frac{m}{r}xx$; linea D N N erit *hyperbola*, sic determinabilis: Sumatur $DM = m$; & per M ducatur M L ad I K parallela; & in hac accipiatur $MQ = \frac{mm}{r}$; & sit $QY = MQ$; & ab M Y auferatur $YZ = g$; connexâque Q D, ducatur Z T ad Q D parallelâ; erunt Z M, Z T *asymptoti*.

Nam ducatur Z S ad M D parallela; cui occurrat G N producta in R (sed & G R ipsam Z T secet in P). Estque jam $PN = RG - RP - GN = \frac{mm}{r} - g + \frac{mx}{r} - y$. adeoque $PN \times MG = \frac{m^3}{r} - mg + yx + gx - my - \frac{m}{r}xx = \frac{m^3}{r} - mg + o. = \frac{m^3}{r} - mg = DM \times ZQ$. unde $PN . ZQ :: (DM . MG ::) QD . ZP$. ergò $PN \times ZP = ZQ \times QD$. Liquet igitur curvam D N N esse *hyperbolam*, cujus *asymptoti* Z M, Z T.

Si æquatiò sit $-yz + gx + my = \frac{m}{r}xx$; eadem erit *hyperbola*. Sed puncta G inter B, M tunc accipiuntur; & ità prout aliis ac aliis locis puncta G designantur, æquationis signa variantur; at non est ea jam exponendi locus.

Fig. 47. XIV. Positione datæ sint rectæ D B, B A; perque rectam D B feratur recta C X ad B A parallela; item per punctum D rotando transeat recta D Y, sic ipsam B A secans in E, ut sit inter rectas B E, D C eadem semper proportio (puta quæ cujusdam assignatæ R ad D B) rectæ verò D E, C X se intersecent punctis N; erit linea D N N *Parabola*.

Nam sit $R . DB :: DB . P$. Est ergò $BE . DC :: DB . P$. Item est $DB . BE :: DC . CN$. ergò $DB . BE + BE . DC = DC . CN$

GN + DB. P, hoc est DB. DC :: DC × DB. CN × P. hoc est DB × DC. DCq :: DC × DB. CN × P. Quapropter est DCq = CN × P; ergò patet *curvam D N N esse parabolam*, cujus *parameter* P, *vertex* D; *diameter* ipsi B A parallela.

Dedit hoc *Gregorius* à S. *Vincentio*,* sed operosâ (si probè memini) prolixitate, demonstratum. * *In Lib. de Spirali.*

XV. Adjicimus; Si reliquis iisdem positis, ità ferantur C X, & D Y, ut jam semper habeant B E, B C rationem eandem (puta quam B D ad R) erunt etiam intersectiones ad *parabolam*. Fig. 48.

Nam bisecetur D B in G, ducatúrque G V ad B E parallela, secans curvam D N N in V; & quoniam est B C. R :: BE. BD :: GN. CD. erit B C × CD = R × C N. ergò (secundum benè notam *parabolæ proprietatem*) est curva D N N *parabola*, cujus *parameter* R, *diameter* G V.

Proletaria sunt forsan ista; sed non perinde notata occurunt hæc:

XVI. Si reliquis similiter positis, recta C X non jam ad ipsam B A, sed ad aliam positione datam (D H) feratur parallela; sitque perpetuò B E. DC :: D B. R; erunt *intersectiones* N ad *hyperbolam*. Fig. 49.

Nam ductâ N G ad B A parallelâ, nuncupentur D B = b. B H = h; D G = x. G N = y. Estque $x . y :: b . \frac{by}{x}$ = BE. item $b . b :: y . \frac{by}{b}$ = GC. quare $CD = x - \frac{by}{b}$. Est igitur (ex hypothesi) $\frac{by}{x} . x - \frac{by}{b} :: b . r$; unde talis ordinabitur æquatio; $yx + \frac{bry}{b} = \frac{b}{b} xx$. ponendóq; $\frac{br}{b} = m$; erit $yx + my = \frac{m}{r} xx$; est ergò curva D N N *hyperbola*,* quæ suprà habetur determinata. * *In* 10 *hujus.*

XVII. Quinetiam si (reliquis, ut in præcedente, suppositis) ità jam feratur C X, ut semper habeat B E ad B C rationem eandem, quam B D ad R; erunt itidem intersectiones N ad *hyperbolam*.

Nam ductâ N G ad A B parallelâ, nominentur rectæ, ut in præeunte; èstque jam $BC = b - x + \frac{by}{b}$; atque $\frac{by}{x} . b - x +$

$\frac{by}{b} :: b.r$, unde talis emerget æquatio: $yx + bx - \frac{br}{b}y = \frac{b}{b} \times x x$; hoc est (posito $\frac{br}{b} = m$) $yx + bx - my = \frac{m}{r} xx$; Est igitur curva BNN *hyperbola*, qualem superiùs exhibuimus determinatam.

Fig. 50, 51, 52.

XVIII. Datæ positione sint rectæ DB, BA; (& in DB designetur punctum D) sitque linea DNN talis, ut ductâ utcunque GN ad BA parallelâ; sumptis verò determinatis g, r, vocatisque DG $= x$; & GN $= y$, sit $ry - yx = gx$; erit linea DNN *hyperbola*, sic determinanda.

Fig. 53.

Capiatur DE $= r$, & BO $= g$; & per E ducatur recta ER ad BA, ac per O recta OS ad BD parallelæ; erunt ZR, ZS *asymptoti*.

Nam ductâ NP ad DB parallelâ, est ZP $= g + y$; & PN $= r - x$; quare ZP × PN $= gr - gx + ry - yx$. Verùm ex hypothesi est $- gx + ry - yx = o$. ergò ZP × PN $= gr =$ ZE × ED. undè liquido constat Propositum.

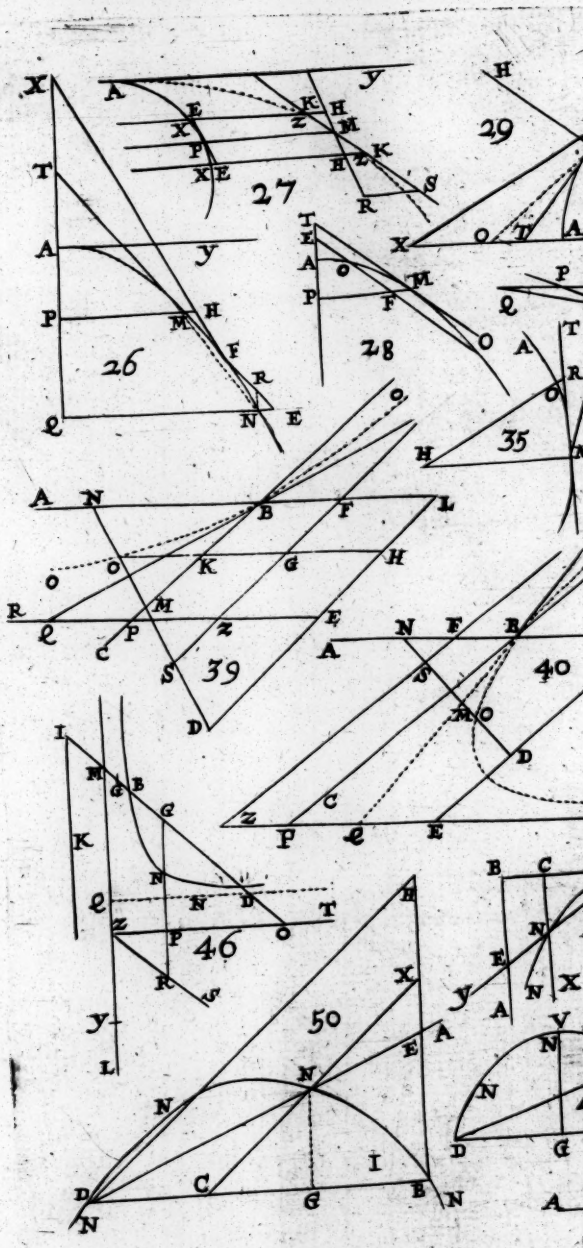
Quòd si fuerit æquatio $xy - ry = gx$; sumenda est DE $= r$; & BO $= g$ (infra rectam DB) ductisque, ceu priùs, parallelis SZR; erit *hyperbola* NNN angulo SZR comprehensa; quod eodem facilè comprobatur modo.

XIX. Datæ positione sint rectæ DB, BA; ac ità ferantur rectæ FX ad DB parallela, ac DY per punctum designatum D transiens, ut sit semper ratio ipsius BE ad ipsam BF æqualis assignatæ DB ad R; erunt rectarum DY, FX intersectiones ad lineam rectam.

Nam per N ducatur GK ad BA parallela; estque DB. DG :: BE. GN :: BE. BF :: BD. R. itaque semper est DG $=$ R. Patet igitur factâ DG $=$ R, & ductâ GK ad BA parallelâ, intersectiones omnes ad hanc existere.

XX. Quòd si reliquis similiter positis, sumpto autem alio in BA puncto O; ab hoc sumatur computandi initium; ut nimirùm sit perpetuò BE, OF :: DB. R; erunt intersectiones N ad *hyperbolam*.

Nam ductâ NG ad AB parallelâ, sit DB $= b$; OB $= g$; DG $=$


27
26
28
29
35
39
40
46
50

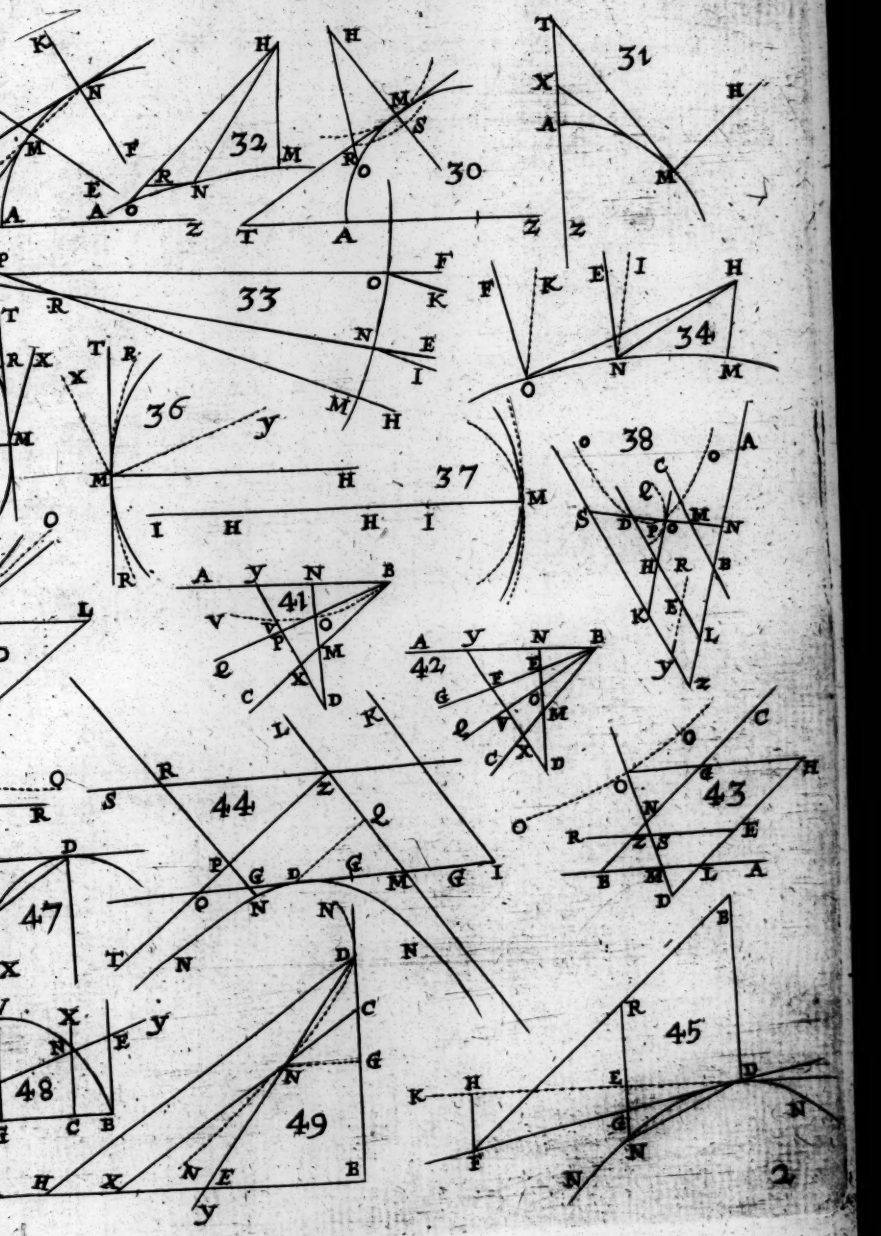

31
32
30
33
34
36
37
38
41
42
43
44
45
47
48
49

Fig.

Fig.

$= x$; $GN = y$. ergò $BE = \frac{by}{x}$; & $OF = g + y$; ergò $\frac{by}{x} \cdot g + y :: b \cdot r$; hinc autem æquatio $ry - yx = gx$. unde DNN est *hyperbola* suprà mox determinata.

Quòd si punctum O sumatur infra DB; fiet æquatio $yx - ry = gx$. unde rursus constat.

XXI. Quinetiam, reliquis similiter positis, recta FX non jam ipsi DB, sed alteri DH feratur parallela; ità ut assumpto in BA puncto habeat semper BE ad OF rationem assignatam (DB ad m) erunt intersectiones N itidem ad *hyperbolam*. Fig. 54.

Nam ducatur NG ad AB parallela; vocenturque $DB = b$; $HB = f$; $HO = g$; $DG = x$; $GN = y$; est ergò $x \cdot y :: b \cdot \frac{by}{x} = BE$; & $b \cdot f :: x \cdot \frac{fx}{b} = GK$; quare $NK\ (FH) = y + \frac{fx}{b}$ & $OF = y + \frac{fx}{b} - g$. Est ergò $\frac{by}{x} \cdot y + \frac{fx}{b} - g :: b \cdot m$. unde resultat æquatio $my + gx - yx = \frac{f}{b} xx$. vel facto $f \cdot b :: m \cdot r$; est $my + gx - yx = \frac{m}{r} xx$. Constat igitur lineam DNN esse *hyperbolam*; qualis superiùs habetur determinata.

Notetur, si computatio ab ipso puncto H. initium sumat, (hoc est sit BE, HF :: DB. m) evanescente tunc termino g, erit $my - yx = \frac{m}{r} xx$; unde quoque suprà habemus alia determinatio simplicior.

XXII. Esto triangulum ADB, & linea DYY talis, ut ductâ utcunque PM ad DB parallelâ, sit perpetuò $PY = q \cdot PMq = DBq$; erit linea DYY *hyperbola*; cujus utique Centrum est A, *semidiameter* AD, (vel *asymptotos* AB) *semiparameter* autem P; faciendo $AD \cdot DB :: DB \cdot P$. Fig. 55.

Sit enim $TD = 2\,AD$. Estque $AD \cdot P :: (ADq \cdot DBq ::$ * 6, 2. *Elem.* $APq \cdot PMq ::$ * $TP \times DP + ADq \cdot PMq :: TP \times DP \cdot PMq - DBq :: TP \times DP \cdot PYq$. vel $TD \cdot P :: TP \times DP \cdot PYq$. unde liquet Propositum.

Corol.

Corol. Si YS tangat *hyperbolam* DYY; erit PMq. PYq:: PA. PS.

Nam est PMq. DBq :: PAq. ADq :: PA. AS. ergò per rationis conversionem est PMq. PYq:: PA. PS.

Fig. 56. XXIII. Quòd si reliquis similiter positis, sit jam PY = √PMq + DBq; erit etiam linea YYY *hyperbola*, cujus nempe Centrum A, *Semidiameter* AF (parallela & æqualis ipsi DB) *Semiparameter* autem P, si fiat AF. AD:: AD. P.

Nam ducatur YK ipsi AP parallela cum AF conveniens in K, sitque FT = ½FA, estque AF. P:: (AFq. ADq:: DBq. ADq:: PMq. APq:: PYq — DBq. APq:: AKq — AFq. KYq::) TK × FK. KYq:: AF. P. unde constat Propositum.

Corol. Rursus, Si recta YS *hyperbolam* FYY tangat, erit PMq. PYq:: PA. PS.

Nam AD est *Semidiameter* ipsi AF conjugata. unde PA. AS:: PAq. ADq:: PMq. DBq. ergò PA. PS:: PMq. PMq + DBq:: PMq. PYq.

Fig. 57. XXIV. Sit triangulum ADB, rectum habens angulum ADB; & curva CGD talis, ut ductâ quâcunque rectâ FEG ad DB parallelâ (quæ lineas expositas secet ut vides) sit aggregatum quadratorum ex EF, EG æquale quadrato ex DB; erit curva CGD *Ellipsis* cujus semiaxes AD, AC.

Nam sit AV = AD. Estque ADq. DBq (ACq):: AEq. EFq:: ADq — AEq. DBq — EFq. Hoc est ADq. ACq:: VE × ED. EGq. unde liquet Propositum.

Nota, Tangat GT *ellipsin* CGD; est EFq. EGq:: EA. ET.

Nam ob AE. AD:: AD. AT. est AEq. ADq:: AE. AT. unde AEq. ADq — AEq:: AE. AT — AE. Hoc est EFq. DBq — EFq:: AE. ET. hoc est EFq. EGq:: AE. ET.

Fig. 58. Sit *Angulus rectilineus* DTH, in cujus latere TD signetur punctum A. Sit item curva VGG proprietate talis, ut ductâ rectâ quâpiam EFG ad TD perpendiculari (quæ lineas TD, TH, VGG secet punctis E, F, G,) connexáque rectâ AF, sit EG = AF, erit linea VGG *hyperbola*.

Nam ducantur AP ad TH & VPC ad TD perpendiculares, item

item PO ad TE parallela. Eſtque EFq = EOq(CPq) + OFq + 2 EO × OF(+ 2 CP × OF). Verùm ob CP. CA :: OP. OF :: CE. OF, eſt CP × OF = CA × CE, ergò EFq = CPq + OFq + 2 CA × CE. item eſt AEq = CEq + CAq — 2 CA × CE; quapropter eſt EFq + AEq = CPq + CAq + OFq + CEq. hoc eſt EGq = (APq + PFq =) CVq + PFq. vel EGq — PFq = CVq. Verùm eſt CE. (PO). PF :: CP. AP :: CP. CV; unde $EGq - \frac{CVq}{CPq} CEq$ = CVq; adeóque linea GVG eſt *hyperbola*, cujus centrum C; ſemiaxes CV, CP.

Not. Ductâ rectâ FQ ad TH perpendiculari, ſumptâque QR = AE; & connexâ GR; erit GR *hyperbolæ* VGG perpendicularis; mihi præſta sis fidem; aut ipſe rem ad Calculum exige; eò verba non profundam.

XXVI. Poſitione datæ ſint rectæ AC, BD (ſe interſecantes in X) quas decuſſet recta AB; tum ductâ utcunque rectâ PKL ad AB parallelâ, (quæ rectas AC, BD ſecet punctis P, K) ſit PL æqualis ipſi BK; erit linea ALL recta. Fig. 59.

Nam, (ductâ XQ ad BA parallelâ, eſt AQ. AP :: (BX. BK ::) QX. PL: ergò linea ALL eſt recta.

XXVII. Poſitione data ſit recta AX, & punctum D; neque non linea DNN talis; ut per D ductâ quâcunque rectâ MN (quæ rectam AX ſecet in M, & lineam DNN in N) ſit perpetim rectangulum ex DM, DN æquale dato (puta quadrato ex Z); erit linea DNN circularis. Fig. 60.

Nam ducatur DB ad AX perpendicularis; ſitque DB. Z :: Z. DE; & connectatur NE; Eſt jam DM × DN = Zq = DB × DE; quare DM. DB :: DE. DN. ergò triangula DBM, DNE ſimilia ſunt; quapropter angulus DNE rectus eſt; itaque linea DNN eſt circularis; (ad circulum pertinens, *cujus Diameter* DE).

Vides nedum rectam & *hyperbolam*; ſed & ſuo modo rectam ac *circulum* ſibi lineas eſſe reciprocas. Verùm hîc, etſi præludiis noſtris nondum abſolutis, paulùm ſubſiſtamus.

LECT. VII.

Lect. VII.

Adhuc in *Vestibulo* hæremus; nec aliud quàm velitamus.

I. Sint duo quanta A, B; quorum majus A; adsumpto tertio quopiam X, erit $A+X.B+X \sqsupset A.B$.

Nam ob $X.A \sqsupset X.B$; erit componendo $X+A.A. \sqsupset X+B.B.$ vel permutando $X+A.X+B \sqsupset A.B$.

II. In linea YZ signentur tria puncta, L, M, N; & inter puncta L, N sumpto puncto quopiam E, alteróque G extra LN (versus Z); Fig. 61. secetur EG in F, ut sit $GE.EF :: NL.LM$; cadet punctum F ad partes MZ:

* 1 *hujus.* Nam est $NE.ME \ast \sqsubset NL.ML :: GE.FE \sqsubset NE.PE$. ergo $FE \sqsubset ME$.

III. Sint rectæ BA, DC parallelæ; item rectæ BD, GP parallelæ; Fig. 62. pérque punctum B ducantur utcunque duæ rectæ BT, BS ipsam GP secantes punctis L, K, dico fore $DS.DT :: KG.LG$.

Nam est $KG.LG = KG.GB+GB.LG = PK.PS+PT.PL = DB.DS+DT.DB = DT.DS$.

IV. Esto triangulum BDT, basíque DB parallelam quamvis PG intersecent per B ductæ quæpiam duæ rectæ BS, BR punctis L, K; dico fore $LG \times TD + KL \times RD.KG \times TD :: RD.SD$.

Fig. 63. Sumantur enim $BM = GP$, & $BN = LP$; & $BO = KP$; unde constat junctas PM, PN, PO ipsis TB, SB, RB (respectivè) parallelas esse. Et quoniam est $DM.PD :: DB.TD$. erit $DM \times TD = PD \times DB$. Similiter est $DN \times SD = PD \times DB$. quare $DM \times TD = DN \times SD = DM \times SD + MN \times SD$, transponendóque $DM \times TD - DM \times SD = MN \times SD$. Simili planè discursu

diſcurſu eſt DM × TD — DM × RD = MO × RD. quapropter erit MN × SD. MO × RD :: TD — SD. TD — RD. hoc eſt LG × SD. KG × RD :: TD — SD. TD — RD; vel (ad æquationem redigendo) LG × SD × TD — LG × SD × RD = KG × RD × TD — KG × RD × SD; tranſponendóque LG × SD × TD + KG × RD × SD — LG × SD × RD = KG × RD × TD. hoc eſt LG × SD × TD + KL × SD × RD = KG × RD × TD. vel (ad analogiſmum reducendo) LG × TD + KL × RD. KG × TD :: RD. SD. Quod erat Propoſitum. Fig. 63.

V. Quòd ſi puncta T, R non ad eaſdem puncti D partes ſita ſint, erit LG × RD — KL × TD. KG × TD :: RD. SD. Fig. 64.
Simili conſtabit id diſcurſu; quem piget repetere.

VI. Sint quatuor continuè proportionalium ſeries æquinumeræ (quales adſcriptas cernis) quarum cùm antecedentes primi, tum ultimi conſequentes inter ſe proportionales ſint (A. α :: M. μ; & F. φ :: S. σ) erunt ejuſdem ordinis quilibet accepti quatuor etiam inter ſe proportionales (puta nempe, D. δ :: P. π).

A. B. C. D. E. F.
α. β. γ. δ. ε. φ.
M. N. O. P. R. S.
μ. ν. ο. π. ϱ. σ.

Sunt enim Aμ, Bν, Cο, Dπ, Eϱ, Fσ, & αM, βN, γO, δP, εR, φS, } Continuè proportionales.

Cùm igitur ſit Aμ, = αM; & Fσ = φS, liquidum eſt fore Dπ = σP; ac idcircò D. δ :: P. π. Ad utramque proportionalitatem (tam Arithmeticam quàm Geometricam) æquè ſpectat hæc Concluſio.

VII. Rectæ AB, CD parallelæ ſint; hásque ſecet poſitione data BD; lineæ verò EBE, FBF ita relatæ ſint, ut ductâ utcunque recta PG ad DB parallelâ; ſit ſemper PF eodem ordine media proportionalis inter PG, PE; tum per quodvis deſignatum lineæ EBE punctum E tranſeat HE ipſis AB, CD parallela, ſitque alia curva KEK talis, ut ductâ utcunque QL itidem ad DB parallelâ, ſit QX Fig. 65.

eodem ſemper ordine media inter QL, QI (eodem inquam illo, quo
Fig. 65. PF media fuerat inter PG, PE): dico lineas FBF, KEK analogas eſſe; hoc eſt ordinatas (quales QR, QK) eandem perpetuò inter ſe rationem habere; eandem ſcilicet illi quam habet PF ad PE.

Hoc è Lemmate proximè præmiſſo conſectatur, uti patebit, ad ſubjectum Schema mentem advertendo.

QS * QR * QI.
QL * QK * QI.
PG * PF * PE.
PE * PE * PE.
} Sunt ÷÷. unde QR. QK:: PF. PE.

Not. Pro lineis rectis AB, HE, CD ſubſtitui poſſent quælibet, etiam curvæ, parallelæ.

Fig. 66. VIII. Sint rurſus, in A concurrentes duæ rectæ AB, AD, rectaq; BD poſitione data; item duæ curvæ EBE, FBF ſic relatæ, ut ductâ utcunque PG ad DB parallelâ, ſit ſemper PF eodem ordine media proportionalis inter PG, PE; tum connexâ AE, ſit alia curva KEK talis, ut ductâ quâpiam rectâ QLI ad DB parallelâ ſit ſemper QK eodem ordine media inter QL, QI, quo fuit PF inter PG, PE; erit rurſus linea FEF ipſi KBK analoga; ſeu perpetim QR. QK:: PF. PE.

Nam QS * QR * QI.
QL * QK * QI.
PG * PF * PE.
PE * PE * PE.
} ſunt ÷÷. item QS. QL:: PG. PE. Et QI. QI:: PE. PE. } ergò QR. QK:: PF. PE.

Not. Pro rectis AB, AH, AD ſubſtitui poſſent tres quævis lineæ analogæ.

XI Item, ſit circulus AGB, cujus centrum D; aliæque duæ curvæ
Fig. 67. EBE, FBF tales, ut per D ductâ quâcunque rectâ DG, ſit perpetuò DF eodem ordine media proportionalis inter DG, DE; tum centro D per E deſcribatur circulus HE; ſitque præterea curva KEK talis, ut ductâ per D quâpiam (ad circulum HE) rectâ DL, ſit ſemper DK

DK eodem ordine media inter DL, DI, quo fuerat DF inter DG, DE; erunt curvæ FBF, KBK analogæ, seu perpetuò DR. DK:: DF. DE.

Nam rursus DS. * DR. * DI.
DL. * DK. * DI.
DG. * DF. * DE.
DE. * DE. * DE.
} sunt ÷÷. unde DR. DK:: DF. DE.

Rursus, pro circulis aliæ lineæ parallelæ, vel analogæ substitui possent.

X. Sint denuò duæ lineæ quævis AGBG, EBE, & altera FBF sic ad istas relata, ut ductâ utcunque à designato puncto D recta DG, sit perpetuò DF eodem ordine media proportionalis inter DG, DE; tum adsumatur linea HEL lineæ AGB analoga (seu talis, ut per D utcunque ductâ DLS, sint perpetuò DS, DL in eadem ratione) sit denuò linea KEK talis, ut ductâ utcunque DL, sit perpetuò DK eodem ordine media inter DL, DI, quo priùs DF inter DG, DE; erit itidem linea FBF lineæ KEK analoga.

Rursus enim DS. * DR * DI.
DL. * DK * DI
DG. * DF * DE
DE. * DE * DE
} sunt ÷÷; } Et tam primi quàm ultimi quatuor termini sunt proportionales. Unde liquet Propositum.

XI. Sit Arithmeticè proportionalium Series A. B. C. D. E. F; in qua sumptis quibuscunque duobus terminis D, F; sit terminorum à primo A (exclusivè) ad ipsum D numerus, N; & terminorum ab A (itidem exclusivè) ad F, sit numerus M; erit A —: D. A —: F:: N. M.

Nam esto differentia communis, X. est ergò $D = A \pm NX$. & $F = A \pm MX$. quare $A — : D = NX$. & $A — : F = MX$. unde A —: D. A —: F :: (NX. MX ::) N. M.

XII. Hinc, si duæ fuerint ejusmodi series; & in utraque sumantur

bini, eodem ordine sibi respondentes, termini (puta D, F in prima, & P, R in secunda) erit A —: D. A —: F :: M —: P. M —: R.

A. B. C. D. E. F.

M. N. O. P. Q. R.

Nam harum rationum utraque par est illi, quam habent ad se numeri N, M, quales in præcedente designati sunt.

Hi verò Numeri N, M vulgò terminorum, quibus aptantur, exponentes, aut Indices vocantur, in serie quavis proportionalium; quales nos semper in sequentibus intelligimus, ubi literas has adhibemus.

XIII. Sint quælibet quanta A, B, C, D, E, F continuè proportionalia Arithmeticè; nec non alia totidem, ab eodem termino A incipientia, Geometricè proportionalia; sit autem illorum secundum B non majus horum secundo M; erit quodlibet in serie Geometrica majus eo, quod ipsi coordinatur in serie Arithmetica.

A. B. C. D. E. F.

A. M. N. O. P. Q.

Est enim A + N ⊏ 2 M (vel ⊏) 2 B = A + C. ergò N ⊏ C. unde M + N ⊏ B + C = A + D. Est autem A + O ⊏ M + N. ergò A + O ⊏ A + D. Et ideò O ⊏ D. ergò M + O ⊏ B + D = A + E. Est autem A + P ⊏ M + O. ergò A + P ⊏ A + E; adeóque P ⊏ E. similique porrò discursu quoad velis.

XIV. Hinc, si rursus fuerint A, B, C, D, E, F ÷÷ Arithmeticè; & A, M, N, O, P, Q sint ÷÷ Geometricè; sitque ultimum F non minus ultimo Q; erit B majus quàm M.

Nam si dicatur B non majus quàm M; erit indè F minus, quàm Q contra hypothesin.

Item, iisdem positis; erit penultimum E majus penultimo P.

XV. Nam si F = Q; constat ex præcedente fore E ⊏ P (scilicet utramque seriem invertendo) sin F ⊏ Q; potiori jure liquet fore E ⊏ P.

XVI. Quinimò demùm, iisdem positis, quodlibet in serie Arithmetica majus est coordinato quolibet in serie Geometrica; puta, C majus est quàm N.

Est

Eſt enim E ⊏ P, ac indè D ⊏ O ; & hinc C ⊏ N.

XVII. Conſectatur hinc ; ſi fuerint quatuor lineæ HBH, GBG, FBF, EBE ſeſe interſecantes in B, ac ita verſus ſe relatæ, ut ductâ utcunque rectâ D H ad poſitione datam D B parallelâ (in linea nempe D D D terminatâ) vel à deſignato puncto D projectâ D H ; ſit perpetuò D G inter D H, D E eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo D F inter eaſdem media Geometricè ; lineæ G B G, F B F ſeſe mutuò contingunt. Fig. 68. 69.

Enimverò linea G B H extra lineam F B F totam cadere manifeſtum è præcedente.

XVIII. Ex iſthinc etiam (quod ſtrictim tranſcurrens moneo) diverſis innumeris *Hyperbolarum*, aut *Hyperboliformium* generibus convenientes rectæ ἀσύμπτωτοι definiuntur. Sint nempe rectæ V D, B D poſitione datæ ; ſint item aliæ duæ rectæ A B, V I ; ductâ verò liberè rectâ P G ad D B parallela, ſit P φ conſtantèr inter P G, P E eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo P F inter eaſdem media Geometricè ; quia jam (a) rectæ E G, E φ ſemper eandem obtinent rationem, eſt linea φ φ φ recta ; verùm linea V F F eſt *hyperbola*, vel *hyperboliformis* aliqua (communis quidem vel *Apolloniana hyperbola*, ſi P F ſit inter ipſas P G, P E ſimpliciter media, ſed alia diverſi generis quædam *hyperboliformis*, ſi P F ſit alterius cujuſpiam ordinis media) atqui patet è penultima præmiſſa lineam φ φ φ eodem ordine reſpondenti lineæ V F F *aſymptoton* eſſe. quod an πρῶτον ſit neſcio, nobis certè πάρεργον fuit, hîc adnotâſſe. Fig. 70. (a) Ex hujus.

XIX. A puncto aſſignato B ad datam poſitione rectam A C ductæ ſint rectæ tres B A, B C, B Q ; tum in Q C producta ſumatur ſumptum quodpiam D ; per B recta (puta B R) duci poteſt (ad alterutras ipſius B Q partes) talis, ut à D projectâ quâcunque rectâ, ceu D N ; ſit hujus à rectis B Q, B R intercepta pars (F E) minor ejuſdem à rectis B A, B C interceptâ parte (N M). Fig. 71.

Nam, primò, ſi B R ultra angulum A B C jaceat reſpectu puncti D ; fiat Q R = C A ; & connectatur B R ; tum utcunque ducatur D E, rectas ſecans, ut vides ; & manifeſtum eſt, * è ſupra monſtratis fore, F E ⊐ N M. * Per 7. Lect. VI.

Sin B Q citra angulum A B C cadat verſus D ; (a) ducatur recta B H talis, ut à B Q, B H interceptæ minores ſint interceptis à B Q, B A ; & ſumatur H R = Q C ; & connectatur B R ; tum rurſus utcunque ductâ D N, quæ rectas interſecet, ut exhibet Schema ; quoniam. * Per VI. 8 Lect. Fig. 72.

niam jam est KF (b) ⊐ NF; & KE * ⊏ MF; perspicuum est restare FE ⊐ NM.

(b) Constr.

Ita quidem ab una rectæ BQ parte recta BR duci potest, quæ minores ipsis MN intercipiat; (a) potest autem ab altera parte recta quoque duci, quæ minores intercipiat ipsis FE; unde totum liquet Propositum.

XX. In recta DZ sint tria puncta D, E, F; & in F sit vertex anguli rectilinei BFC, cujus latera secet recta DBC; per E verò ducta sit recta EG; potest ab E recta duci (ceu EH) talis, ut à puncto D projectâ utcunque rectâ DK sit in hac à rectis EG, EH intercepta minor à rectis FC, FB interceptâ.

Fig. 73.

Ducantur ES ad FC, & ER ad FB parallelæ; & in primo casu, ubi punctum E puncto D vicinius est, (ob similitudinem triangulorum ENM, FKI) manifestum est fore MN ⊐ IK; (a) potest autem ab E duci recta (puta EH) talis, ut interceptæ PO minores sint interceptis MN; ergò liquet.

(a) 19. hujus.

In altero casu, ubi punctum F ipsi D propius, sumatur SL æqualis ipsi CB; & connectatur EL; Estque jam IK. MN :: FK. EN :: DF. DE :: FC. ES :: BC. RS (c) :: LS. RS (d) ⊏ QN. MN. quapropter est IK ⊏ QN. (a) potest autem ab E recta duci, ceu EH, sic ut ab EG, EH interceptæ OP minores sint interceptis QN. quamobrem abundè constat Propositum.

Fig. 74.

(c) Constr.

(d) 6. Lect. VI.

XXI. Curvam BA tangat recta BO in B; sitque recta BO æqualis curvæ BA; sumpto tunc in curva puncto quopiam K connectatur recta KO; erit KO major arcu KA.

Fig. 75.

Nam, quoniam recta minimum est inter bina puncta intervallum, est BK + KO ⊏ BO = BK + KA. ergò KA ⊏ KO.

XXII. Hinc, utcunque sumptis (ad easdem contactûs partes) duobus punctis K, L, connexâque rectâ KL; erit KL + LO ⊏ KA.

Nam, supra contactum versus A, est KL + LO ⊏ KO ⊏ KA.

Infra verò, est KL + LB ⊏ KB (ex hypothesibus *Archimedæis*) adeóque KL + LO ⊏ KA.

LECT.

LECT. VIII.

MIhi ſanè videor (videbor & vobis, opinor) quod irridebat *ſapiens ille Scurra, perquam exigua Civitati portas ingentes extruxiſſe.* Nec enim adhuc aliud quam ad rem aliquanto propius enitimur. ad illam.

I. Hæc adſumimus. Si duæ lineæ (OMO, TMT) ſeſe contingant, angulos ipſæ comprehendunt (OMT) rectilineo quovis angulo minores. Et vice versâ: Si duæ lineæ (OMO. TMT) angulos contineant quovis rectilineo minores, illæ ſeſe contingent (contingentibus ſaltem æquipollebunt). Fig. 76, 77.

Hujus *effati* rationem jampridem (ni fallor) attigimus.

II. Hinc; Si duas lineas OMO, TMT tertia quæpiam linea PMP contingat, ipſæ etiam lineæ OMO, TMT ſeſe contingent.

Nam quoniam lineæ OMO, PMP ſeſe contingunt, erit angulus OMP quovis *rectilineo* minor. Item, ob linearum TMT, PMP *contactum*, erit *angulus* TMP quovis etiam *rectilineo* minor. Erit igitur angulus TMO *rectilineo* quovis minor. Unde lineæ OMO, TMT ſe mutuò contingent.

III. Tangat recta FA curvam FX in F; ſitque poſitione data recta FE; ſint item duæ curvæ EY, EZ tales, ut ductâ utcunque rectâ IL ad EF parallelâ (quæ lineas expoſitas ſecet, ut vides) ſit ſemper intercepta KL æqualis interceptæ IG; etiam curvæ EY, EZ ſeſe contingent. Fig. 78.

Si non tangant, poteſt inter ipſas conſtitui angulus rectilineus, puta BEC; hunc utcunque ſecet ad FE parallela IL, ſumatúrque GH = BC, & connectatur FH; ſunt igitur è parallelis ad FE à rectis FG,

FG, FH interceptæ pares interceptis ab EB, EC; hoc eſt minores interceptis à curvis EY, EZ; hoc eſt minores interceptis à curva FX, & rectâ FA; quapropter angulus XFA rectilineo HFG major eſt; unde recta FA curvam FX non tangit, contra *Hypotheſin*.

Fig. 79. IV. Itidem, Tangat recta FA curvam FX, & ſint duæ curvæ EY, EZ tales, ut ab aſſignato puncto D utcunque ductâ rectâ IL (quæ lineas expoſitas ſecet ut vides) ſit ſemper KL = IG; curvæ EY, EZ ſeſe tangent.

(a) 20 Lect. VII. Nam, ſi neges, his interſeratur *angulus rectilineus* BEC; quem utcunque a D projecta ſecet recta DL; (a) poteſt jam ab F recta dūci (puta FH) talis, ut ſint è projectis à D a rectis FG, FH interceptæ minores interceptis ab ipſis EB, EC, hoc eſt multo minores interceptis à recta EA, curváque FX. Unde ſequetur angulum AFX rectilineo GFH majorem eſſe; ac idcircò rectam AF non contingere curvam FX, adverſus *Hypotheſin*.

Hæ præcedentes duæ Concluſiones veræ ſunt, & ſimili ratione demonſtrantur, poſito interceptas IG, KL quamvis ad ſe perpetim habere proportionem eandem. Parco verbis.

Propoſuimus hæc, ut ſequentium nonnulla à ſcrupulis muniantur.

V. Sit recta VEI, duæque curvæ YFN, ZGO ſic ad ſe relatæ, ut ductâ utcunque rectâ EFG ad poſitione datam AB parallelâ, habeant interceptæ EG, EF ſemper eandem rationem inter ſe; tangat autem recta TG curvarum unam ZGO in G (cum recta VE conveniens in T) ducta TE alteram YFN quoque continget.

Nam utcunque ducatur recta IL (lineas expoſitas ut vides interſecans) Eſt igitur IL. IN (a) ⊏ IO. IN :: EG. EF :: IL. IK. Igitur IN ⊐ IK. ergò punctum K extra curvam YFN jacet; totáq; recta TF.

(a) *Hyp.*

Aliter. Eſt IL. IK :: (IO. IN :: IK — IO. IK — IN ::) OL. NK, ergò cùm lineæ GL, GO ſe (b) tangant, (c) etiam lineæ FN, FK ſeſe tangent.

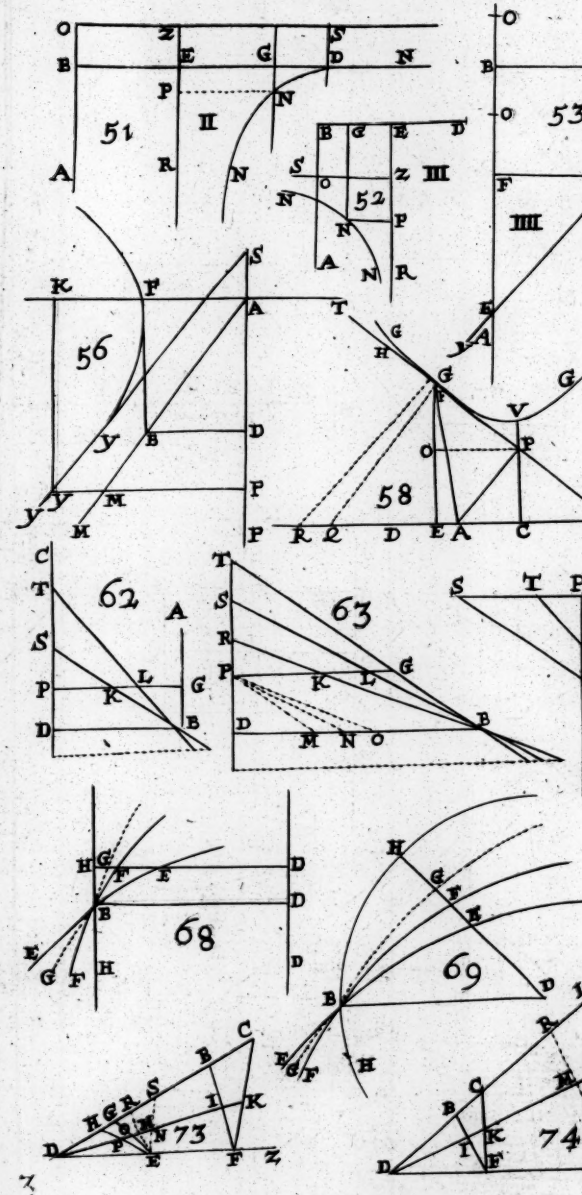
(b) *Hyp.*
(c) *Schol. 4. hujus.*

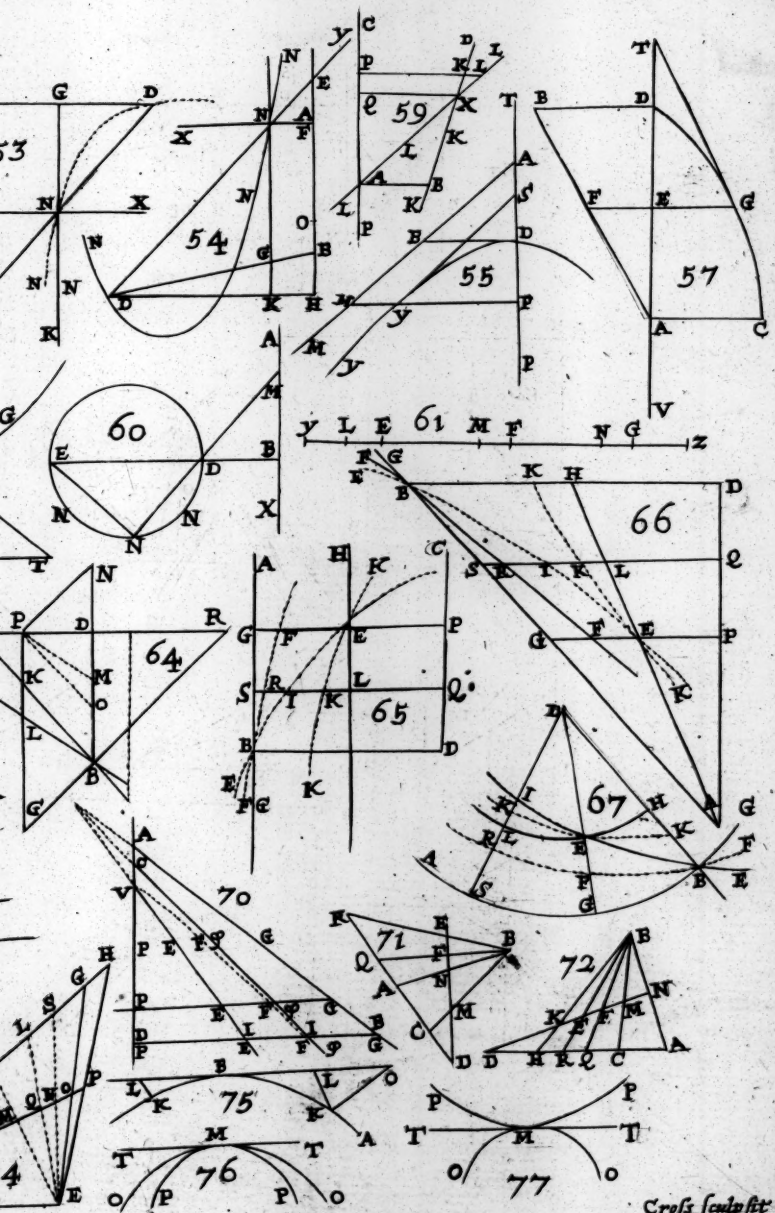
Fig. 80. VI. Etiam ſi tres curvæ XEM, YFN, ZGO ità referantur ad ſe, ut ductâ utcunque rectâ EFG ad poſitione datam parallelâ, ſint ſemper EG, EF in eadem ratione, concurrant autem duarum XEM, ZGO tangentes ET, GT in T; adjuncta TF curvam YFN tanget.

Nam

II.

VI.


51
52
53
56
58
62
63
68
69
73
74


53
54
55
57
59
60
61
64
65
66
67
70
71
72
75
76
77
Cross sculpsit

Nam (facto ut priùs) erit IL. IK :: EG. EF :: MO. MN. * quapropter erit punctum K extra curvam YFN. * 2. Lect. VII.

Possit hæc, ut præcedens, aliter ostendi; sed verbis pluribus.

Curvas ità sitas concipe quales figura monstrat. nam στρογγυλοχίαν ego ac ἀδολεσχίαν fugitans casus præ cæteris obvios ac faciles arripiens propono. Hoc ubique subnotatum velim.

VII. Sit punctum datum D, curvæque duæ XEM, YFN, ità relatæ, ut à D projectâ quacunque rectâ DEF, habeant ad se rectæ DE, DF rationem semper eandem; unam verò YFN tangat recta FS; cui parallela sit ER; tanget recta ER curvam XEM. Fig. 81.

Nam à D utcunque projiciatur recta DK (lineas intersecans, ut vides). Estque DK. DI :: DF. DE :: DN. DM; ergò quum sit DK ⊏ DN; erit DI ⊏ DM; quare tota recta RE extra curvam XEM cadit.

Rectæ NK, MI rationem semper eandem obtinent; unde res aliter constat.

VIII. Sint tres curvæ XEM, YFN, ZGO tales, ut si ab assignato puncto D projiciatur utcunque recta DEFG, habeant interceptæ EG, EF rationem semper eandem (puta quam R ad S) tangant autem rectæ ET, GT curvarum duas (puta XEM, ZGO) in E, G; oportet curvæ YFN tangentem ad F designare. Fig. 82.

Concipiatur curva TFV talis, ut à D utcunque projectâ rectâ DMKL, (quæ secet rectas TE, TG punctis I, L, & istam curvam in K) habeant semper interceptæ IL, IK rationem eandem datæ R ad S; (a) est igitur IK ⊏ IN; quare curva TFK curvam YFN tangit; (b) est autem curva TFK *hyperbola*; hanc tangat FS; (c) illa quoque curvam YFN tanget.

(a) 2 Lect. VIII.
(b) 4 Lect. VI.
(c) 2. *hujus*.

Quoniam *hyperbolam* tangentis hîc primum injecta est mentio; hujus (unà cum aliarum omnium consimili ratione procreatarum seu *reciprocarum linearum tangentibus*) *tangentem* ità definiemus.

IX. Sint VD recta linea, duæque curvæ XEM, YFN ità relatæ, ut ductâ liberè rectâ EDF ad positione datam parallelâ, sit semper *rectangulum* ex DE, DF par eidem alicui spatio; tangat autem recta ET curvam XEM in E, cum recta VD concurrens in T; sumatúrque DS = DT; & connectatur FS; hæc curvam YFN tanget ad F. Fig. 83.

Nam utcunque ducatur IN ad EF parallela, lineas expositas secans,

cans, ut vides. Estque TP. PM ⊏ (TP. PI::) TD. DE item SP. PK:: SD. DF. ergò TP×SP. PM×PK ⊏ TD ×SD. DE×DF:: TD×SD. PM×PN. Verum TD× SD ⊏ TP×SP; ac indè magis TD×SD. PM×PK ⊏ TD× SD. PM×PN. quare PM×PK ⊐ PM×PN; vel PK ⊐ PN. Itaque recta FS extra-curvam YFN tota jacet.

Not. Si linea XEM recta fuerit (utique ipsi TEI coincidens) erit YFN *hyperbola* vulgaris, cujus centrum T, *asymptotos* una TS, altera TZ ad EF parallela.

X. Quinetiam sit punctum D; curvæque duæ XEM, YFN ità relatæ, ut per D ductâ quacunque rectâ EF; sit perpetuò rectangulum ex DE, DF æquale cuidam quadrato (ex Z puta); unam verò curvam XEM tangat recta ER; alterius ad F tangens ità determinatur: Ducatur DP ad ER perpendicularis: factóque DP. Z:: Z. DB; bisecetur DB in C; connexâque CF, ducatur FS ad CF normalis; hæc curvam YFN tanget. Fig. 84.

Nam centro C per F describatur *Circulus* DOB; & per B trajiciatur utcunque recta IN lineas intersecans, ut vides; estque DO× DI (*a*) = DP×DB (*b*) = Zq (*c*) = DM×DN vel DO. DM :: DN. DI. ergò quum sit DM (*c*) ⊐ DI; erit DO ⊐ DN; itaque circulus DOB curvam YFN tanget. Quare recta FS eandem YFN tanget.

(*a*) 27 Lect. VI.
(*b*) *Constr.*
(*c*) *Hyp.*

XI. Curvæ XEM, YFN tales sint, ut ductâ quâpiam FE ad positione datam parallelâ, sit semper hæc æqualis eidem alicui; curvam autem YFN tangat recta SF; huic parallela RE alteram XEM continget. Fig. 85.

Nam utcunque ductâ MK ad FE parallelâ est NI ⊐ (KI = FE =) NM. Quare punctum I extra curvam XEM jacet, *&c.*

Reverà linea XEM nil aliud est, quàm ipsa YFN *translocata.* Levius hoc, & methodi tantùm gratiâ Propositum.

XII. Sit curva quæpiam XEM, quam tangat recta ER ad E; sit item alia curva YFN ad alteram ità relata, ut ab assignato puncto D utcunque ductâ rectâ DEF, sit semper intercepta EF æqualis alicui determinatæ Z; curvæ YFN tangens (ad F) ità designatur: Sumatur DH = Z; & per H ducatur AH ad DH perpendicularis, ipsi ER occurrens in B, & per F ducatur FG ad AB parallela; sumatúrque GL = GB; erit connexa LFS curvæ YFN tangens. Fig. 86.

Nam.

Nam *asymptotis* E R, A B per F descripta concipiatur *hyperbola* O F O; cui occurrat à D projecta quæpiam D O, lineas expositas secans, uti cernis. Estque Q O (*a*) = D P; (*b*) quare M O ⊏ D P (*c*) ⊏ D H (*b*) = M N. ergò *hyperbola* O F O curvam Y F N tangit. (*a*) *Convers. 9. Lect. VI.* (*b*) *Hyp.* (*c*) *Elem.*

Verùm (*d*) recta L S *hyperbolam* O F O tangit; hæc itaque curvam Y F N quoque tanget. (*d*) *9. hujus*

Not. Si X E M ponatur linea recta (vel ipsi E R coincidat) erit Y F N *Conchois* prima vulgaris, seu *Nicomedea*; hujus igitur tangens è generali ratione quâdam habetur determinata.

XIII. Sit recta L A, curváque quæpiam B E I; cum alia curva D F G talis, ut ductâ liberè rectâ P F E ad positione datâm quandam parallelâ, possit recta P E quadratum ex P F unà cum quadrato ex datâ Z; item curvam B E I tangat recta E T; tum fiat P E q. P F q :: P T. P S; connexa S F curvam D F G tanget. Fig. 87.

Nam concipiatur curva V F H talis, ut liberè ductâ Q K ad P E parallelâ (quæ lineas expositas secet ut vides) sit perpetuò Q K q = Q H q + Z q; unde quoniam est Q K (*a*) ⊏ Q I; erit Q K q − Z q ⊏ Q I q − Z q; hoc est Q H q ⊏ Q G q; ergò curva V F H curvam D F G tanget ad F; (*b*) est autem curva V F H *hyperbola*, quam (*c*) tangit recta S F. hæc itaque curvam D F G quoque continget. (*a*) *Hyp.* (*b*) *22. Lect. 6.* (*c*) *Cor. 22. Lect. I.*

XIV. Cætera ponantur eadem; at jam P E unà cum quadrato ex data Z possit quadratum ex P F; fiatque P E q. P F q :: P T. P S; & connectatur F S; hæc rursus ipsam G F G continget. Fig. 88.

Similis est demonstratio; sed adhibe 23^am^ primæ Lectionis.

XV. Sint curvæ duæ A F B, C G D, communem habentes *axem* A D, ac ità versus se relatæ, ut ductâ quâcunque rectâ F E G ad A D perpendiculari (quæ rectas expositas secet ut vides) sit summa quadratorum ex ipsis E F, E G æqualis quadrato ex determinata recta Z; tangat autem recta F R ex his curvis unam A F B; & fiat E F q. E G q :: E R. E T; connexa G T curvam C G D quoque tanget. Fig. 89.

Concipiatur enim curva O G O talis, ut ductâ rectâ K Q O (quæ rectas F R, E R secet punctis K, Q, curvam O G O in O) sit Q K q + Q O = Z q; erit ideò Q K q + Q O q = Q I q + Q L q; & cùm sit Q K q (*a*) ⊏ Q I q, erit ideò Q O q ⊐ Q L q. itaque curva O G O curvam C G D (introrsum) tangit. (*b*) Est autem (ex ostensis) (*a*) *Hyp.* (*b*) *24. Lect. VI.*

ostensis) curva O G O *Ellipsis*, quam recta G T tangit. ergò recta G T curvam C G D quoque tanget.

Fig. 90. XVI Sit curva quæpiam A F B (cujus axis A D, & ad hunc applicata D B) sit etiam alia curva V G C ad istam sic relata, ut à designato quodam in axe A D puncto Z ad curvam A F B utcunque ductâ rectâ Z F, & per F ductâ rectâ E F G ad D B C parallelâ, sit E G æqualis ipsi Z F; sit autem P Q perpendicularis curvæ A F B; sumatúrque Q R æqualis ipsi Z E; connexa recta G R ipsi curvæ V G C perpendicularis erit.

Nam ducatur F T ad ipsam F Q perpendicularis, seu curvam A F B tangens; & concipiatur curva O G O talis, ut ductâ quâcunq; rectâ H K O ad E F G parallelâ (quæ rectas T E, T F, & curvam O G O secet punctis H, K, O) connexâque Z K, sit H O = Z K; tum ductâ Z I, quoniam H K (a) ⌐ H I, erit Z K ⌐ Z I, vel H O ⌐ H L; quare curva O G O curvam V G C tangit. (b) Est autem O G O (ex ostensis) *Hyperbola*, cui perpendicularis est recta G R; eadem itaque G R curvæ V G C quoque perpendicularis erit: Quod E. D.

(a) *Hyp.*
(b) 25 Lect. VI

Fig. 91. XVII. Sint recta D Q, duæque curvæ D R S, D Y X ità relatæ, ut ductâ utcunque rectâ R E Y ad positione datam D B parallelâ (quæ dictas lineas secet, ut perspicis) connexâque rectâ D Y, sit semper R Y. D Y :: D Y. E Y; tangat autem recta R F curvam D R S ad R; oportet curvæ D Y X tangentem ad Y rectam designare.

Concipiatur linea D Y O talis, ut ductâ utcunque G O ad D B parallelâ (quæ lineas F R, F P, D Y O secet punctis G, P, O) connexâque D O sit semper G O. D O :: D O. P O; tanget curva D Y O curvam D Y X ad Y; Nam secet recta G O curvas D R S, D Y X punctis S, X; & connectantur rectæ D G, D S, D X; patet (è curvarum natura) angulos X D P, D S P; nec non angulos O D P, D G P æquari; quare cùm angulus D S P major sit angulo D G P; erit angulus X D P angulo O D P major, adeóque P X major erit quàm P O; hinc curva D Y O curvam D Y X tanget ad Y; est autem curva D Y O *hyperbola* (a) superiùs determinata; hanc tangat Y S; hæc igitur curvam D Y X quoque tanget.

(a) 12 Lect. VI.

Not. Si curva D R S sit circulus, & angulus Q D B rectus, erit curva D Y X *cissois* vulgaris; hujus itaque (cum innumeris aliis similiter genitis) tangens hîc definitur.

Fig. 92. XVIII. Positione datæ sint rectæ D B, B K; sitque curva D Y X talis;

talis; ut à puncto D ductâ quâvis rectâ D Y H (quæ rectam B K secet in H, curvam D Y X in Y) sit perpetuò subtensa D Y æqualis rectæ B H; oportet curvæ D Y X tangentem ad Y rectam determinare.

Centro D per B ducatur circulus B R S; cui occurrat recta Y E R ad B K parallela; & connectatur D R; estque (propter ang. D Y E = ang. D H B; & D Y = B H, ac D R = D B) triangulum R D Y triangulo D B H simile ac æquale; quare R Y . Y D :: (D H . H B) :: Y D . Y E. unde ex præcedente determinabilis est recta curvam D Y X tangens in Y.

XIX. Sint itidem rectæ D B, B K positione datæ; nec non curva B X X talis, ut à puncto D projectâ quâcunque rectâ D X (quæ rectam B K secet in H, curvámque B X X in X) sit perpetuò H X ipsi B H æqualis; designetur oportet recta curvam B M X tangens in X. Fig. 93.

Concipiatur curva D Y Y talis, ut perpetuò sit D Y = B H (talis nempe, qualem attigimus in præcedente) hanc verò tangat recta Y T in Y, ipsi B K occurrens in R; tum *asymptotis* R B, R T per X descripta censeatur *hyperbola* N X N; ad quam utcunque proficiatur recta D N (lineas expositas secans, ut vides) Estque jam O M (*a*) = D I) ⊐ (*a*) (D L (*b*) =) O N; ergò *hyperbola* N X N curvam B X X tangit ad X. Ducatur itaque recta X S *hyperbolam* N X N contingens, hæc ipsam curvam B X X quoque continget.

(*a*) *Constr.* (*b*) *Convers.* 9. Lect. VI.

Cæterùm satis pro hac vice nugati videmur; cessemus aliquantisper.

LECT. IX.

LECT. IX.

QUod ingreſſi ſumus iter actutùm rectà proſequemur.

I. Sint rectæ A B, V D ſibi parallelæ; quas ſecat poſitione data D B; tranſeant verò per B lineæ E B E, F B F ità ad ſe relatæ, ut ductâ quâvis P G ad D B parallelâ, ſit perpetuò P F inter P G, P E eòdem ordine deſignato media *Arithmeticè*; tangat autem recta B S curvam E B E; oportet lineæ F B F tangentem (ad B) deſignare.

Fig. 94.

Sint Numeri N, M proportionalium P F, P E (quales (*a*) explicuimus ſupra) exponentes; fiátque N. M :: D S. D T; connectatúrque T B; hæc lineam F B F continget.

(*a*) 12. Lect. VII.

Nam utcúnque ducta ſit recta P G, dictas lineas ſecans, utì cernis: Eſtque F G. E G (*b*) :: N. M :: (*c*) D S. D T :: (*d*) L G. K G; cùm ergò (*e*) ſit K G ⊐ E G; erit L G ⊐ F G; unde liquet rectam T B extra curvam F B F totam conſiſtere.

(*b*) 11. Lect. VII.
(*c*) *Conſtr.*
(*d*) 3. Lect. 7.
(*e*) *Hyp.*

II. Reliquis perſtantibus iiſdem, ſit jam P F inter P G, P E media proportionalis Geometricè (eodem ordine media nempe, quo fuit priùs Arithmeticè) eadem B T curvam F B F continget.

Etenim è mediis Arithmeticè Geometricéque proportionalibus hocce modo conſtructæ lineæ ſeſe mutuò (*a*) contingunt ad B; ergò cùm recta B T tangat unam, hæc alteram quoque continget.

(*a*) 17. Lect. 7.

Exemplum. Sit P F inter P G, P E è ſex mediis tertia; erit ergò M = 7; & N = 3; adeóque D S. D T :: 3. 7.

III. Manente porrò quoad cætera proximè præcedente hypotheſi, ſumptóque quovis in curva F B F puncto F; etiam ad hoc punctum tangens recta ſimili pacto deſignatur.

Fig. 95.

Nempe per F ducatur recta P G ad ipſam D B parallela, ſecans curvam E X E in E, tum E X tangat curvam E B E in E; fiátque N. M ::

M : : PX . PY ; connectatúrque recta FY ; hæc curvam FBF continget.

Nam per E ducatur recta C E ad A B (vel V D) parallela ; concipiatúrque per E transiens curva H E H talis, ut ductâ quâpiam Q L ad D E parallelâ (curvas E B E, H E H in L, & H ; rectáſque C E, V P in I ac Q ſecante) ſit ſemper Q H inter Q I, Q L eodem ordine media, quo P F inter P G, P E ; è præcedente jam conſtat rectam connexam E Y curvam H E H contingere ; verùm curvæ H E H (*a*) analoga eſt curva F B F ; (*b*) ergò recta F Y curvam F B F quoque continget.

a 7. Lect. 7.
b 5. Lect. 8.

IV. Adnotetur, poſito lineam E B E rectam eſſe, quòd linea FBF parabolarum ſeu paraboliformium aliqua ſit. quare quod de his paſſim obſervatum habetur (ex calculo deductum, & inductione quâdam comprobatum, neſcio tamen an uſpiam Geometricè oſtenſum) ex immensùm uberiore fonte manat, ad iunumeras aliorum generum curvas ſe diffundente.

V. Hinc apertè conſectatur ; ſi T D ſit recta, ſintque duæ quædam curvæ E E E, F F F ità ad ſe relatæ, ut ductis rectis P E F ad poſitione datam B D parallelis, ſint ordinatæ P E ſemper ut quadrata ex ordinatis P F ; rectæ verò E S, F T (ex ejuſdem communis ordinatæ terminatis ductæ) curvas haſce contingant ; erit T P = 2 S P ; Quòd ſi ordinatæ PE ſe habeant ut ipſarum PF cubi, erit TP = 3 SP ; ſi P E ſint ut quadrato quadrata ipſarum P F, erit T P = 4 S P ; ac ſic eodem ad infinitum continuo tenore. Fig. 96.

VI. Sit porrò Circulus A B C, cujus Centrum D, radius D B, item lineæ E B E, F B F per B tranſeuntes, ac ità relatæ, ut ductâ per D rectâ quâpiam D G, ſit ſemper D F eodem ordine media Arithmeticè inter D G, D E ; tangat autem recta B O curvam E B E in B ; oportet curvæ F B F tangentem (ad B) deſignare. Fig. 97.

Hoc (certè (*a*) generatim quadantenus præſtitum) è re fuerit hìc ſpeciatim apertius atque plenius exequi : Quorſum ſit D Q ad D B perpendicularis, quam ſecet B O in S ; fiat verò N . M : : D S . D T ; connectatúrque recta T B ; hæc curvam F B F tanget.

a 8. Lect. 8.

Tangat enim recta P B *circulum* A B G ; ſecentúrque rectæ D S in X, & B S in Y, ità ut ſit D S . D X : : M . N : : B S . B Y ; perque puncta X, Y ducantur X Z ad B S, & Y V ad D S parallelæ, concurrentes in C ; tum *aſymptotis* Y C Z per B traducta concipiatur *hyperbola* L B L ; porrò ex D projiciatur utcunque recta D P diſtas lineas inter- Fig. 97.

intersecans, ut expressum vides; estque jam PK. PL :: (a) M. N :: (b) GE. GF (c) ⊏ PE. PF ⊏ PK. PF; quare PL ⊐ PF; igitur *Hyperbola* LBL curvam FBF tangit. Protracta jam TB cum XZ conveniat in R; estque tum RZ. ZB :: BS. ST. unde RZ × ST = BS × ZB = BS × SX. atqui propter DS. SX :: (d) BS. SY, est DS × SY = BS × SX. ergò RZ × ST = DS × SY = DS × CX. vel RZ. CX :: DS. ST; compositéque RZ · RZ + CX :: DS. DT :: (d) N. M :: CZ. CZ + CX. itaque divisim est RZ. CX :: CZ. CX. adeóque RZ = CZ; unde RB *hyperbolam* LBL tangit; hæc igitur (RBT) curvam FBF, ipsi LBL contiguam, quoque tanget. quod erat Propositum.

a Convers. 4. Lect. VI.
b 11. Lect. VII.
c 1. Lect. VII.
d Constr.

VII. Hinc si persistentibus reliquis, recta tantùm DF jam inter DG, DE perpetuò Geometricè media statuatur (eodem qui priùs fuit ordine) eadem BT curvam FBF quoque continget.

Etenim ex mediis ejusdem ordinis *Arithmeticè Geometricèque* proportionalibus efformatæ lineæ se mutuò contingunt, adeóque communi rectâ tangente gaudent.

Fig. 98.

VIII. Porrò (stantibus reliquis ut in postremâ) quodvis in curva FBF designetur punctum F, quæ curvam ad hoc tanget recta simili pacto determinatur.

Connectatur utique recta DF curvam EBE secans ad E; item ducatur DQ ad DG perpendicularis ipsam EO intersecans ad X; fiat etiam DX. DY :: N. M; & connectatur EY; ipsi demùm EY parallela ducatur FZ; hæc curvam FBF continget.

Nam centro D per E ducatur circulus CEI; concipiatúrque linea HEH talis, ut à D eductâ quacunque rectâ DI (quæ circulum CE secet in I, curvam HEH in H, & ipsam EBE in L) sit perpetuò DH eodem inter DI, DL ordine proportionalis, quo DF inter DG, DE; palam est tunc (è præcedente) quòd recta EY curvam HEH tanget; verùm ipsi HEH (a) analoga est curva FBF; (b) quare recta FZ curvam FBF quoque tanget.

a 9. Lect. VII.
b 7. Lect. VIII.

Exhinc nedum innumerarum spiralium; at aliarum diversi generis infinities plurium tangentes quàm promptè determinantur.

Fig. 99.

IX. Hinc clarum est, si duæ lineæ EEE, FEF sic ad se referantur, ut à puncto quodam D utcunque projectis rectis DEF; habeant se rectæ DE, ut quadrata ex ipsis DF, & ad harum terminos tangant curvas rectæ ES, FT; cum perpendicularibus ad ipsas

DEF

DEF concurrentes punctis S, T; erit semper DT = 2 DS. Quòd si DE sunt ut cubi ipsarum DF, erit semper DT = 3 DS; ac simili deinceps modo. Fig. 99.

X. Sint rectæ VD, TB concurrentes in T, quas decussét positione data recta DB; transeant etiam per B lineæ EBE, FBF tales, ut ductâ quâcunque PG ad DB parallelâ, sit perpetuò PF eodem ordine media Arithmeticè inter PG, PE; tangat autem BR curvam EBE; oportet lineæ FBF tangentem ad B determinare. Fig. 100.

Sumptis NM (ordinum in quibus sunt PF, PE exponentibus) fiat $N \times TD \overset{+M}{-N} \times RD . M \times TD :: RD . SD$; & connectatur BS; hæc curvam FBF continget.

Nam utcunque ducta sit PG, dictas lineas secans ut vides. Estque EG. FG :: (a) M. N. ergò FG × TD. EG × TD :: N × TD. M × TD. Item EF × RD. EG × TD :: M − N × RD. M × TD. Quapropter (antecedentes conjungendo) erit FG × TD + EF × RD. EG × TD :: N × TD + M − N × RD. M × TD; (hoc est) :: (b) RD. SD. (c) Est autem LG × TD + KL × RD. KG × TD :: RD. SD. quare FG × TD + EF × RD. EG × TD :: LG × TD + KL × RD. KG × TD. hinc, cùm sit EG (d) ⊏ KG; erit FG × TD + EF × RD ⊏ LG × TD + KL × RD; vel FG. EF + TD. RD ⊏ LG. KL + TD. RD; seu (demptâ communi ratione) FG. EF ⊏ LG. KL. vel componendo EG. EF ⊏ KG. KL (e) ⊏ EG. EL. unde est EF ⊐ EL. itaque punctum L extra curvam FBF situm est; adeoque liquet Propositum.

(a) 11. Lect. VII. (b) Constr. (c) 4. Lect. VII. (d) Hyp. (e) 1. Lect. VII.

XI. Quinetiam, reliquis stantibus iisdem, si PF supponatur ejusdem ordinis Geometricè media liquet (planè sicut in modò præcedentibus) eandem BS curvam FBF contingere.

Exemplum. Si PF sit è sex mediis tertia, seu M = 7; & N = 3; erit 3 TD + 4 RD. 7 MD :: RD. SD; vel $SD = \frac{7MD \times RD}{3TD + 4RD}$.

XII. Patet etiam, accepto quolibet in curva FBF puncto (ceu F) rectam ad hoc tangentem consimili pacto designari. Nempe per F ducatur recta PG ad DB parallela, secans curvam EBE ad E; & per E ducatur ER curvam EBE tangens; fiátque $N \times TP \overset{+M}{-N} \times RP$. Fig. 101.

M × T P :: R P . S P, & connectatur S F, hæc curvam F B F tanget, id quod omnino ſimili diſcurſu demonſtratur, quo tertia hujus; tantùm hîc (non per E ad V D parallela ducitur, at) connectitur E T, & loco ſeptimæ allegatur octava ſeptimæ Lectionis. quid plura?

XIII. Adnotetur, ſi linea E B E ſit recta, (rectæ nempe B R coincidens) eſſe lineam F B F ex *infinitis hyperbolis* (vel *hyperboliformibus*) aliquam; quarum igitur (unà cùm aliarum infinities diverſi generis plurium) *Tangentes* determinandi modum uno *Theoremate* complexi ſumus.

XIV. Quòd ſi puncta T, R non ad eaſdem partes puncti D (vel P) cadant; curvæ F B F tangens (B S) deſignatur faciendo N × R D —: Fig. 102.

$$\left.\begin{matrix} M \\ -N \end{matrix}\right\} \times TD . M \times TD :: RD . SD.$$

Simili planè diſcurſu conſtat hoc, tantùm (quartæ loco) ſeptimæ Lectionis quintam adhibendo.

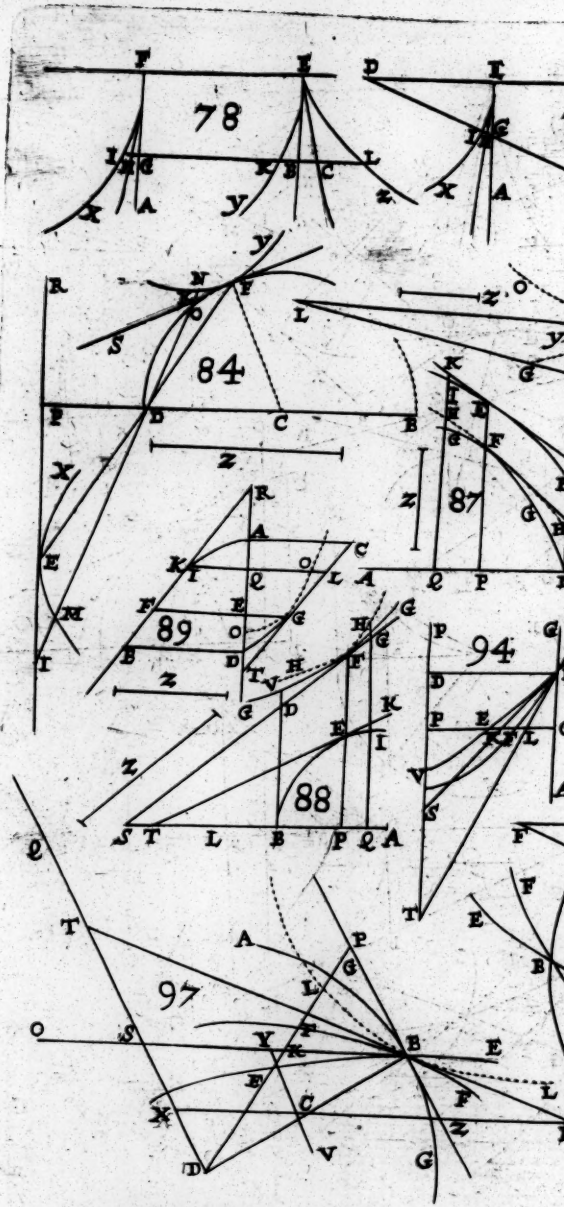
XV. Hinc autem nedum *Ellipſoidum* omnium (poſito nempe lineam E B E rectam eſſe, lineæ B R coincidentem) aſt aliarum alterius generis *linearum innumerabilium Tangentes* unâ operâ determinantur.

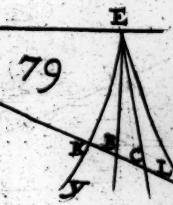
Exemplum. Si P F ſit è quatuor mediis quarta, ſeu M = 5; & N = 4; erit $SD = \frac{5\,TD \times RD}{4\,RD - TD}$.

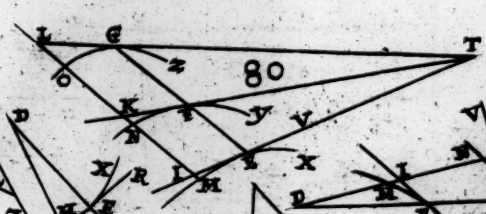
Notetur; Si contigerit eſſe $ND \times RD = \left.\begin{matrix} M \\ -N \end{matrix}\right\} \times TD$, eſſe DS infinitam; ſeu B S ipſi V D parallelam. Alia poſſent adnotari; ſed relinquo.

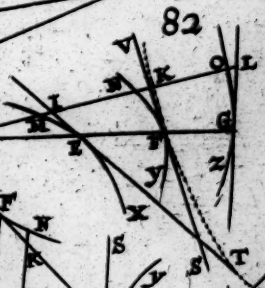
XVI. Inter alias curvas innumeras, etiam hâc methodo *Ciſſois & Ciſſoidalium* omne genus comprehenditur: Sit utique ſemirectus angulus D S B; curvæque duæ S G B, S E E ſic ad ſe referantur, ut ductâ liberè rectâ G E ad B D parallelâ, (quæ lineas expoſitas, ut conſpicis, ſecet) ſint P G, P F, P E continuè proportionales; tangat autem recta G T curvam S G B in G, reperietur quæ ad E lineam S E B tangit, faciendo 2 TP — SP . TP :: SP . RP; utique connexa R E curvam S E E tanget. Id quod è præmiſſis facilè colligitur. Quòd ſi jam curva S G B ſit circulus, & applicationis angulus S P G Fig. 103.

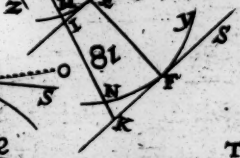
ſit


78
84
87
89
94
88
97
Cross sculpsit

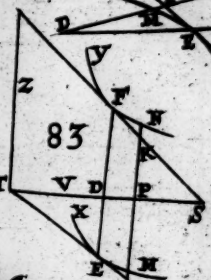

79


80

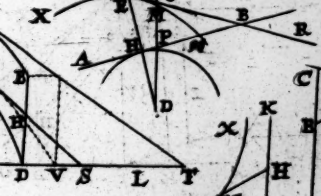

82

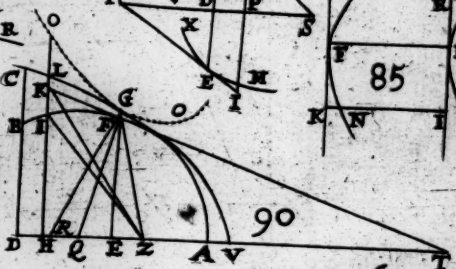

81

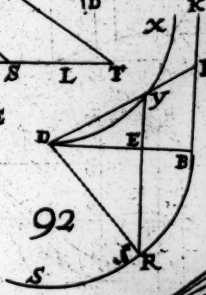
86

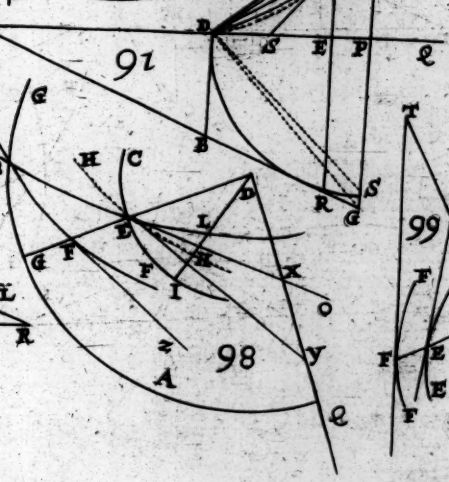

83

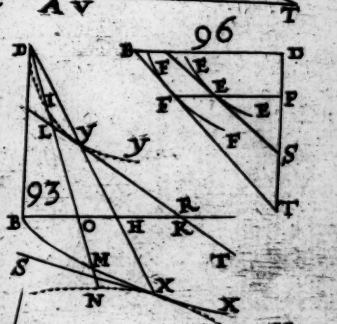
85




90

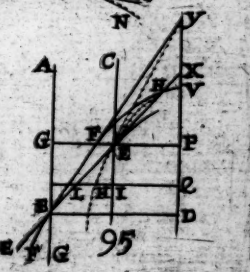

92


91


96
93

98

99


95

sit rectus, erit curva S E E *Cissois vulgaris*, seu *Diocleа*; alioquin alterius generis *Cissoidalis*. Hoc autem ἐν παρόδῳ perstringo. Neq; jam ampliùs vos detinebo.

LECT. X.

INstitutum circa tangentes negotium adhuc urgeo.

I. Sit curva quæpiam A E G, nec non alia A F I sic ad illam relata, ut ductâ quâcunque E F ad positione datam A B parallelâ (quæ curvam A E G secet in E, curvámque A F I in F (sit perpetim E F æqualis curvæ A E G ab A intercepto arcui A E; tangat autem recta E T curvam A E G in E, sitque E T æqualis arcui A E, & connectatur recta T F; hæc curvam A F I tanget. Fig. 104.

Nam ducatur utcunque recta G K ad A B parallela, lineas propositas secans, ut cernis; éstque G K = G H + H K = G H + H T (a) ⊏ arc. A G = G I; unde punctum K extra curvam A F I situm est; adeóque recta T K ipsam tangit. (a) 22 Lect. VII.

II. Quòd si recta E F quamlibet ad arcum A E rationem semper eandem habeat, nihilo seciùs recta F T curvam A F I tanget; ut ex hac, & octavæ Lectionis sexta manifestæ consectatur.

Hæc antea pridem aliter ostendimus; ast hæc demonstratio simplicior aliquanto videtur, & clarior; methodóque quam insinuamus accommodatior.

III. Sit *curva* quæpiam A G E, punctúmque designatum D; sit item alia curva A I F talis, ut à D projectâ rectâ quâcunque D E F, sit semper intercepta E F par arcui A E; tangátque recta E T curvam A G E; oportet curvæ A I F *Tangentem* (ad F) designare. Fig. 105.

Fiat T E = arc. A E; sitque curva T K F talis, ut ductâ utcunque (è D) rectâ D K (quæ curvam T K F secet in K, rectámque T E in H)

sit semper HK = HT; tum curvam TKF (a) tangat recta FS in F, hæc curvam AIF quoque continget.

(a) 17 Lect. VIII.

Est enim GK = GH + HK = GH + HT (a) GA = GI. quare punctum K extra curvam AIF jacet; adeóque recta FS curvam AIF continget.

(a) 22. Lect. VII.

IV. Quòd si recta EF ad arcum AE eandem aliquamcunque statuatur habere proportionem, tangens ejus facilè determinatur ex hac, & octava octavæ Lectionis.

V. Sint recta AP, duæque *curvæ* AEG, AFI, ità ad se relatæ ut ductâ utcunque rectâ DEF (quæ rectam AP, curvas AEG, AFI punctis D, E, F, secet) sit semper recta DT æqualis arcui AE; tangat autem recta ET curvam AEG ad E; sumatúrque ET par arcui EA; & sit TR ad BA parallela; connectatur denuò recta RF; hæc curvam AFI tanget.

Fig. 106.

Concipiatur enim curva LFL talis; ut ductâ quâcunque rectâ PL ad AB parallelâ (quæ curvam AEG in G, rectam TE in H, curvam LFL in L secet) sit perpetuò recta PL æqualis ipsis TH, HG simul; est itaque PL (a) ⌐ arc. AEG* = PI. Unde curva LFL curvam AFI tangit. Item recta IK (b) æquatur rectæ TH; (c) adeóque curva LFL rectam RFK tangit; (d) quare curvam AFI tanget recta.

(a) 22. Lect. VII.
(b) 26. Lect. VI.
* Hyp.
(c) 3 Lect. VIII.
(d) 2. Lect. VIII.

VI. Etiam si rectæ DE ad arcus AE quamlibet semper eandem rationem habeant, recta RF nihilominus curvam AFI tanget, ut ex hac, & sexta octavæ Lectionis facilè patet.

VII. Sit punctum D; duæque curvæ AGE, DIF ità versus se relatæ sint, ut à puncto D projectâ quâvis rectâ DFE, sit perpetuò recta DF æqualis arcui AE; tangat autem recta ET curvam AGE ad E; designanda jam est recta, quæ curvam DIF tangat (ad F).

Fig. 107.

Sumatur ET par *arcui* FS; concipiatúrque *curva* DKK talis, ut à D projectâ utcunque rectâ DH (quæ curvam DKK in K, rectam TE in H secet) sit perpetuò DK = TH; tum curvam DKK (a) tangat recta FS ad F; hæc curvam DIF quoque tanget.

(a) 16. Lect. VIII.

Intelligatur enim *curva* LFL talis, ut à D projectâ quapiam rectâ DH (quæ rectam TE secet in H, curvam LFL in L) sit semper DL = TH + HG; est itaque DL (b) ⌐ arc. AG (c) = DI; (d) itaque curvæ DIF, LFL sese (b) contingent. item curvæ KFK, LFK

(b) 22. Lect. VII.
(c) Hyp.
(d) 4. Lect. VIII.

LFK seſe contingunt. (e) quare curvæ D I F, K F K ſe quoque contingent. (e) ergò denique recta F S curvam D I F continget. (e) 2. Lect. VIII.

VIII. Quòd ſi rectæ D F quamvis aliam conſtanter eandem ad arcus A E rationem obtinuerint, itidem deſignari poteſt recta curvam D I F tangens, ex hac, & ſeptima octavæ Lectionis; erit utique tangens iſta huic F S parallela.

IX. Hinc nedum *ſpiralis circularis*, aſt innumerabilium ſimili ratione progenitarum aliarum curvarum *Tangentes* determinantur.

X. Sint curva quæpiam A E H, recta A D (in qua determinatum punctum D) recta D H poſitione data; ſit item curva A G B talis, ut in hac aſſumpto quocunque puncto G, & per hoc ac D projectâ rectâ D G E (quæ curvam A E H ſecet in E) ductâque G F ad D H parallelâ habeant A E, A F aſſignatam rationem X ad Y; tangat autem recta E T curvam A E H; recta deſignetur oportet, quæ curvam A G B ad G tangat. Fig. 108.

Fiat recta E V æqualis arcui E A; & concipiatur curva O G O talis, ut projectâ quâcunque rectâ D O L (quæ curvam Q G O ſecet puncto O, rectam E T in L) ductâque O Q ad G F parallelâ, ſit V L. A Q :: X. Y; eſtque curva O G O (è ſupra monſtratis) *Hyperbola*; hanc tangat recta G S; etiam recta G S curvam A G B continget.

Nam concipiatur altera curva N G N talis, ut cùm hanc ſecet recta arbitraria D L in N, curvam A E H in K, rectam T E in L, ductáq; ſit N R ad G F parallela, ſit V L + L K. A R :: X. Y; manifeſtum eſt curvam N G N utramque curvam A G B, & O G O tangere. [ſecet enim recta D L curvam A E B in I, ducatúrque I P ad G F parallela; quum ergò ſit V L + L K. A R :: X. Y :: A K. A P. & ſit V L + L K ⊏ A K; erit A R ⊏ A P; vel D R ⊐ D P; adeóque D N ⊐ D I; unde punctum N intra curvam A G B ſemper cadet, ac proinde curva N G N curvam A G B tanget; ſimilique planè diſcurſu curva N G N curvam O G O continget.] Itaque curvæ A G B, O G O ſeſe (æquipollenter) tangunt. Quare cùm recta G S curvam O G O tangat; eadem curvam A G B quoque continget: Q. E. F.

Si curva A E H ſit circuli quadrans, cujus centrum D; erit curva A G B *Quadratrix communis*. Ejus igitur *Tangens* (unà cùm omnium ſimili ratione genitarum tangentibus) hoc pacto deſignatur,

Hujuſmodi

Hujuſmodi plura quædam cogitaram hîc inſerere; verùm hæc exiſtimo ſufficere ſubindicando modo, juxta quem, citra *Calculi moleſtiam*, *curvarum tangentes* exquirere licet, unáque conſtructiones demonſtrare. Subjiciam tamen unum aut alterum non aſpernanda, ut videtur *Theoremata* perquam generalia.

XI. Sit linea quæpiam Z G E, cujus axis V D; ad quam imprimìs applicatæ perpendiculares (V Z, P G, D E) ab initio V Z continuè utcunque creſcant; ſit item linea V I F talis, ut ductâ quâcunq; rectâ E D F ad V D perpendiculari (quæ *curvas* ſecet punctis E, F, ipſam V D in D) ſit ſemper *rectangulum* ex D F, & deſignatâ quâdam R æquale *ſpatio* reſpectivè *intercepto* V D E Z; fiat autem D E. D F :: R. D T; & connectatur recta T F; hæc curvam V I F continget.

Fig. 109.

Fig. 110.

Sumatur enim in linea V I F punctum quodpiam I (illud primò ſupra punctum F, verſus initium V) & per hoc ducantur rectæ I G ad V Z, ac K L ad V D parallelæ (quæ lineas expoſitas ſecent, ut vides) éſtque tum L F. L K :: (D F. D T ::) D E. R; adeóque L F × R = L K × D E. Eſt autem (ex præſtituta linearum iſtarum natura) L F × R æquale ſpatio P D E G; ergò L K × D E = P D E G ⊐ D P × D E. Unde eſt L K ⊐ D P; vel L K ⊐ L I.

Rurſus accipiatur quodvis punctum I, infra punctum F, reliquáq; fiant, utì priùs; ſimiliſque jam planè diſcurſu conſtabit fore L K × D E = P D E G ⊏ D P × D E, unde jam erit L K ⊏ D P, vel L I. E quibus liquidò patet totam rectam T K F K intra (ſeu extra) curvam V I F I exiſtere.

Iiſdem quoad cætera poſitis, ſi *ordinatæ* V Z, P G, D E, *&c.* continuè decreſcant, eadem concluſio ſimili ratiocinio colligetur; unicum obvenit *Diſcrimen*, quòd in hoc caſu (contra quàm in priore) linea V I F concavas ſuas axi V D obvertat.

Corol. Notetur D E × D T æquari ſpatio V D E Z.

XII. Exindè deducitur hoc *Theorema*: Sint duæ lineæ quævis Z G E, V K F ta relatæ, ut ad communem ipſarum axem V D applicatâ quâvis rectâ E D F, ſit ſemper quadratum ex D E æquale *duplo ſpatio* V D E Z; ſumatur autem D Q = D E, & connectatur F Q; hæc curvæ V K F perpendicularis erit.

Fig. 111.

Concipiatur enim linea V I F, per F tranſiens, talis qualem mox attigimus (cujus ſcilicet ad V D applicatæ ſe habeant ut ſpatia V D E Z; hoc eſt ut quadrata ex applicatis à curva V K F in præſente hypotheſi) lineámque

lineámque V I F tangat recta F T; item lineam V K F tângat recta F S. Est ergò S D (a) = 2 T D. atqui D E × D T (b) = V D E Z. ergò D E × S D = (2 V D E Z. =) F D q. unde constat angulum Q F S rectum esse. quod Propositum erat. (a) 5. Lect. IX. (b) Cor. prac.

Adjungam & illis cognata hæc.

XIII. Sit curva quævis A G E Z, punctúmque quoddam D (à quo projectæ D A, D G, D E, &c. ab initio D A continuò decrescant) tum altera sit curva D K E, priorem intersecans in E, naturâque talis, ut à D utcunque projectâ rectâ D K G (quæ curvam A E Z secet in G, curvam D K E in K) sit perpetuò rectangulum ex D K, & designatâ quâdam lineâ R æquale spatio A D G; tum ductâ D T ad D E perpendiculari, sit D T = 2 R; & connectatur T E; hæc curvam D K E continget. Fig. 112.

Nam sumpto quovis in curva D K E puncto K, ducatur recta D K G; & sumptâ D L = D K, ducatur L R ad D T parallela (secans ipsam D G in Y). tum per E ducatur E X ad D E perpendicularis (hæc verò extra curvam A E Z, ad partes Z cadet, quia decrescunt projectæ versus Z; unde E X versus A intra curvam E G A cadet; eatenus saltem, quatenus huic Proposito satisfaciet). Sit jam primò punctum G supra E, versus initium A, & ob T D. D E :: R L. L E; adeóque R L × D E = T D × L E (a) = 2 R × L E (a) = 2 G D E ⌐ 2 D E X = E X × D E. ergò R L ⌐ E X ⌐ L Y. Est autem punctum Y extra curvam, quia D Y ⌐ D L = D K, ergò magis punctum R est extra curvam. Fig. 113. (a) Hyp.

Sit rursus punctum G infra punctum E, versus Z; estque rursus, uti prius, R L × D E = 2 G D E ⌐ 2 triang. E D X = E X × D E. unde R L ⌐ E X ⌐ L Y. Est autem recta L Y extra curvam E K tota, (nam etiám extra arcum L K curvæ K E circumductum tota jacet) ergò punctum R rursus extra curvam existit. Liquidum est igitur rectam T E R curvam D K E tangere.

Quòd si punctum aliud in curva D K E designetur, puta K; per quod ducta sit D K G; & fiat D G. D K :: R. P; sumaturque D T = 2 P; & connectatur T G; tum ducatur K S ad G T parallela; recta K S curvam D K E tanget.

Nam concipiatur curva D O G, per G transiens, talis, ut rectâ quâcunque D O N à D projectâ (quæ curvam D O G secet in O, curvam D N E in M, curvam A G E in N) sit semper D O × P æqualis spatio A D N, erit ideò D M × R = D O × P; ac proinde D M. D O :: P. R. unde lineæ D K E, D O G analogæ erunt. Verùm

rùm ex jam modò oſtenſis G T curvam D O G tangit; ergò K S ipſam D K E continget.

Notetur eſſe D G q . D K q :: 2 R . D S .

Nam eſt D G q . D K q = D G . D K + D G . D K = R . P + D T . D S = R . P + 2 P . D S = 2 R P . P × D S = 2 R . D S . itaque D G q . D K Q :: 2 R . D S.

Hæc autem perinde vera ſunt, nec abſimili modo demonſtrantur; etiam ſi projectæ à D rectæ D A, D G, D E, *&c.* pares ſint (quo caſu curva A G E Z *Circulus* erit, & *Curva* D K E *Spiralis Archimedæa*) aut à D A continuò creſcant.

Exindè verò facilè colligitur hoc *Theorema*:

XIV. Sint duæ curvæ A G E, D K E ità verſus ſe relatæ, ut à deſignato in curva D K E puncto D ductis rectis D A, D G (quarum
Fig. 114. hæc ipſam D K E ſecet in K) ſit ſemper *Quadratum* ex D K *Quadruplum ſpatii* A D G; ductâ D H ad D G perpendiculari, & facto D K. D G :: D G. D H; connexâque H K; erit H K curvæ D K E perpendicularis.

Nam concipiatur linea D O K O, per K tranſiens, naturâque talis ut ad illam à D projectæ (ceu D K) ſe habeant in eadem quâ ſpatia A D G ratione (quales lineas attigimus in proximè ſuperiori) & lineam D O K tangat recta K T, lineam D K E recta K S; conveniant autem hæc cum ipſa H D punctis T, S; eſt igitur (è præcedente) D G q. D K q :: $\frac{DK}{2}$. D T. hoc eſt D H . D K :: $\frac{DK}{2}$ D T; hoc eſt (quo-
* *In* 12. *hujus.* niam è * mox præmonſtratis D S = 2 D T) D H . D K :: ($\frac{DK}{2}$. $\frac{DS}{2}$ ::) D K . D S. Liquet igitur rectam H K tangenti K S perpendicularem eſſe: Q. E. D.

Ità Propoſiti noſtri priore (quam innuebamus) parte quomodocunque defuncti ſumus. Cui ſupplendæ, appendiculæ inſtar, ſubnectemus à nobis uſitatum methodum ex Calculo tangentes reperiendi. Quanquam haud ſcio, poſt tot ejuſmodi pervulgatas atque protritas methodos, an id ex uſu ſit facere. Facio ſaltem ex Amici conſilio; eóque libentiùs, quòd præ cæteris, quas tractavi, compendioſa videtur, ac generalis. In hunc procedo modum.

Sint A P, P M poſitione datæ rectæ lineæ (quarum P M propoſitam curvam ſecet in M) & M T curvam tangere ponatur ad M, rectam

rectam A P ſecare ad T; ut ipſius jam rectæ P T quantitatem exquiram; curvæ arcum M N indefinitè parvum ſtatuo; tum duco rectas N Q ad M P, & N R ad A P parallelas; nomino M P = *m*; P T = *t*; M R = *a*; N R = *e*; reliquáſque rectas, ex ſpeciali curvæ natura determinatas, utiles propoſito, nominibus deſigno; ipſas autem M R, N R (& mediantibus illis ipſas M P, P T) per *æquationem* è Calculo deprehenſam inter ſe comparo; regulas interim has obſervans. 1. Inter computandum omnes abjicio terminos, in quibus ipſarum *a*, vel *e* poteſtas habetur, vel in quibus ipſæ ducuntur in ſe (etenim iſti termini nihil valebunt). Fig. 115.

2. Poſt *æquationem conſtitutam*, omnes abjicio terminos, literis conſtantes quantitates notas, ſeu determinatas deſignantibus; aut in quibus non habentur *a*, vel *e*. (etenim illi termini ſemper, ad unam æquationis partem adducti, nihilum adæquabunt).

3. Pro *a* ipſam *m*; (vel M P) pro *e* ipſam *t* (vel *P T*) ſubſtituo. Hinc demùm ipſius P T quantitas dignoſcetur.

Quòd ſi calculum ingrediatur curvæ cujuſpiam indefinita particula; ſubſtituatur ejus loco tangentis particula ritè ſumpta, vel ei quævis (ob indefinitam curvæ parvitatem) æquipollens recta.

Hæc autem è ſubnexis Exemplis clariùs eluceſcent.

Exemp. I.

Angulus A B H rectus ſit; & ſit curva A M O talis, ut per A ductâ utcunque rectâ A K, quæ rectam B H ſecet in K, curvam A M O in M, ſit ſemper ſubtenſa A M æqualis abſciſſæ B K; hujus curvæ ad M tangens eſt deſignanda. Fig. 116.

Fiant quæ ſuprà præſcripta ſunt, & (ductâ A N L) nominetur A B = *r*; & A P = *q*; unde A Q = *q* — *e*; item Q N = *m* — *a*. ergò eſt $qq + ee - 2qe + mm + aa - 2ma$ = (A Q q + Q N q = A N q =) B L q; hoc eſt (rejectis, uti monitum eſt, rejiciendis) $qq - 2qe + mm - 2ma$ = B L q. Porrò eſt A Q. Q N :: A B. B L; hoc eſt $q - e . m - a :: r . BL = \frac{rm - ra}{q - e}$. quare $\frac{rrmm + rraa - 2rrma}{qq + ee - 2qe.} = BLq$; ſeu (rejectis ſuperfluis) $\frac{rrmm - 2rrma}{qq - 2qe} = BLq = qq - 2qe + mm - 2ma$. vel $rrmm - 2rrma = q^4 - 2q^3e + qqmm - 2qqma - 2q^3e + 4qqee - 2qmme + 4qmae$; hoc eſt (abjectis iis, quæ præſcripſimus abjici-

abjicienda) $-2rrma = -4q^3e - 2qqma - 2qmme$. vel $rrma - qqma = 2q^3e + qmme$; vel denuò ſubſtituendo m pro a, & t pro e, eſt $rrmm - qqmm = 2q^3t - qmmt$; vel $\frac{rrmm - qqmm}{2q^3 - qmm} = t = PT$.

Exemp. II.

Fig. 117. Sit recta EA (poſitione ac magnitudine data) & curva EMO proprietate talis, ut ab ea utcunque ductâ rectâ MP ad EA perpendiculari *Summa Cuborum* ex AP, & MP æquetur *Cubo* rectæ AE.

Nominentur $AE = r$; $AP = f$; unde $AQ = f + e$; & AQ cub. $= f^3 + 3ffe + 3fee + e^3$; (ſeu abjectis ſuperfluis, ex præſcripto) $= f^3 + 3ffe$. Item NQ cub. $=$ cub. $m - a = m^3 - 3mma + 3maa - a^3$ (hoc eſt) $= m^3 - 3mma$. Quapropter eſt $f^3 + 3ffe + m^3 - 3mma =$ (AQ cub. $+$ NQ cub. $=$ AE cub. $=$) r^3. abjectiſque datis, eſt $3ffe = 3mma = o$. ſeu, $ffe = mma$; ſubrogatiſque loco a, & e ipſis m, & t, erit $fft = m^3$; ſeu $t = \frac{m^3}{ff}$; eſt ergò PT quarta proportionalis in ratione AP ad PM continuata.

Similiter, Si fuerit $APqq + MPqq = AEqq$; reperietur fore $PT = \frac{m^4}{f^3}$; vel PM quarta proportionalis in ratione AP ad PM; ac ità porrò; quod de *Cycloformibus* iſtis lineis an obſervatu dignum ſit neſcio.

Exemp. III.

Fig. 118. *La Galande* Poſitione data ſit recta AZ, & AX magnitudine; ſit etiam *curva* AMO talis, ut ductâ utcunque rectâ MP ad AZ normali, ſit AP *cub.* $+$ PM *cub.* $=$ AX $\times$ AP $\times$ PM.

Dicantur $AX = b$; & $AP = f$; ergò $AQ = f - e$; & AQ *cub.* $= f^3 - 3ffe$; & QN *cub.* $= m^3 - 3mma$. & $AQ \times QN = fm - fa - me + ae = fm - fa - me$; unde $AX \times AQ \times QN = bfm - bfa - bme$; hinc æquatio $f^3 - 3ffe + m^3 - 3mma = bfm - bfa - bme$; ſeu amoliendo rejectanea

ctanea, $bfa - 3mma = 3ffe - bme$; ſubſtituendóque $bfm - 3m^3 = 3fft - bmt$; ſeu, $\frac{bfm - 3m^3}{3ff - bm} = t$.

Exemp. IV.

Sit *Quadratrix* CMV (ad circulum CEB pertinens cui centrum A,) cujus axis VA; ordinatæ CA. MP ad VA perpendiculares.

Protractis rectis AME, ANF, ductiſque rectis EK, FL ad AB perpendicularibus, dicántur arcus CB = p; radius AC = r; recta AP = f; AM = k. Eſtque jam CA arc. CB :: NR. arc. FE. Fig. 119.

hoc eſt, $r.p :: a.\frac{pa}{r}$ = arc. FE. & AM. MP :: AE. EK; hoc eſt, $k.m :: r.\frac{rm}{k}$ = EK; item AE. EK :: arc. FE. LK. hoc eſt $r.\frac{rm}{k} :: \frac{pa}{r}.\frac{pma}{rk}$ = LK. Verùm AM. AE :: AP. AK; hoc eſt $k.r :: f.\frac{rf}{k}$ = AK. ergò $\frac{rf}{k} - \frac{pma}{rk}$ = AL. Et $\frac{rrff}{kk} - \frac{2fmpa}{kk}$ (abjectis ſuperfluis) = AL q; adeóque LF q = $\frac{rrkk - rrff + 2fmpa}{kk} = \frac{rrmm + 2fmpa}{kk}$.

Eſt autem AQ q. QN q :: AL q. LF q; hoc eſt $Q{:}f - e.Q{:}m + a$:: AL q. LF q. hoc eſt $ff - 2fe.mm + 2ma :: rrff - 2fmpa.rrmm + 2fmpa$. Unde (ſublatis ex norma rejectaneis) emerget *æquatio*, $ffpa + mmpa - rrfa = rrme$; ſeu $kkpa - rrfa = rrme$; vel ſubſtituendo juxta *præſcriptum*; $kkpm - rrfm = rrmt$; vel $\frac{kkp}{rr} - f = t$. Hinc colligitur eſſe rectam AT = $\frac{kk}{rr}p$; hoc eſt (quoniam, ut notum eſt, AV = $\frac{rr}{p}$) erit AT = $\frac{AMq}{AV}$; ſeu, AV. AM :: AM. AT.

Exemp. V.

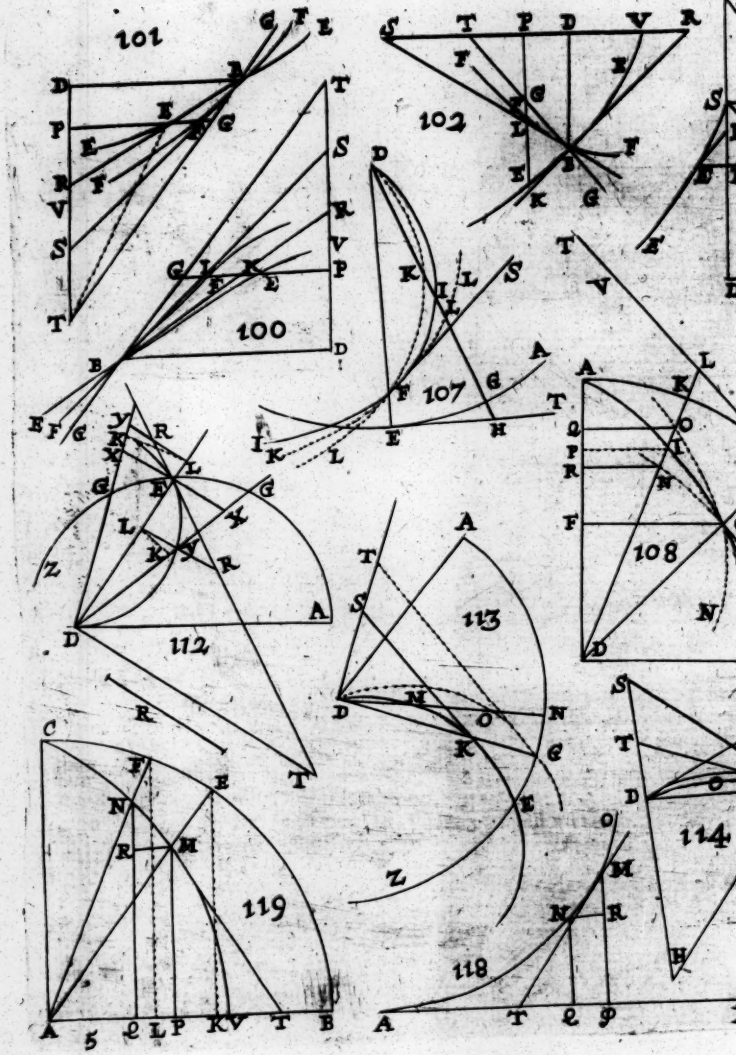
Fig. 120, 121. Sit D E B *Quadrans Circuli*, quem tangat recta B X; tum linea A M O talis, ut in recta A V utcunque sumptâ A P, quæ arcum B E adæquet, erectáque P M ad A V normali, sit P M æqualis arcûs B E tangenti B G.

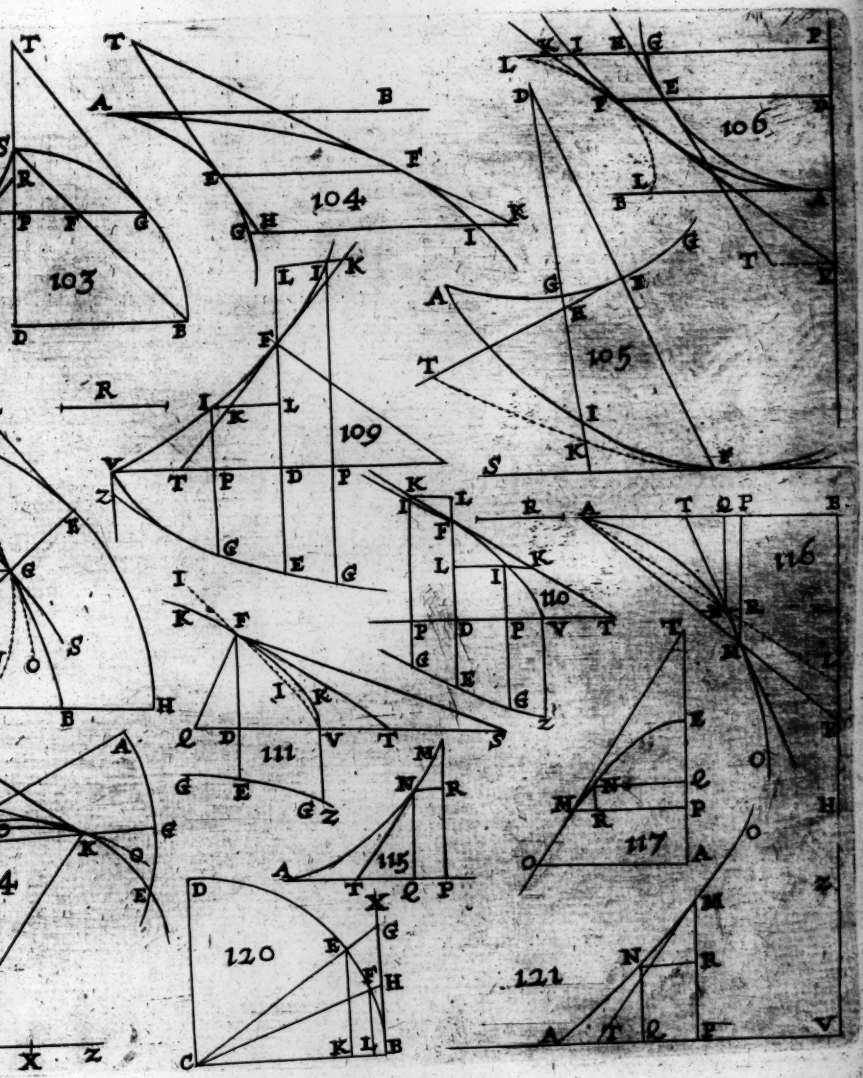
Sumpto arcu B F = A Q; & ductâ C F H; demissis E K, F L ad C B normalibus; nominentur C B = r. C K = f: K E = g. Et quoniam est C E. E K :: arc. E F. L K; vel C E. E K :: Q F. L K; hoc est $r . g :: e . \frac{ge}{r}$ = L K; erit C L = $f + \frac{ge}{r}$. Et L F = $\sqrt{rr - ff - \frac{2fge}{r}} = \sqrt{gg - \frac{2fge}{r}}$.

Est autem C L. L F :: (C B. B H ::) C B. Q N. hoc est, $f + \frac{ge}{r} \sqrt{gg - \frac{2fge}{r}} :: r . m - a$. vel (quadrando) $ff + \frac{2fge}{r} gg - \frac{2fge}{r} :: rr . mm - 2ma$. Unde (dimissis quæ oportet) obtinetur æquatio, $rfma = grre + gmme$. unde substituendo, est $rfmm = grrt + gmmt$. vel $\frac{rfmm}{grr + gmm} = t$. seu (quoniam est $m = \frac{rg}{f}$) erit $t = \frac{rr}{rr + mm} m = \frac{CB_q}{CG_q} BG = \frac{CK_q}{CE_q} BG$.

Hæc sufficere videntur huic methodo elucidandæ.

LECT. XI.


101
100
102
107
108
112
113
114
118
119


103
104
105
106
109
110
111
115
116
117
120
121

LECT. XI.

RElíquis utcunque patratis, apponemus iam *quæ ad magnitudinum è tangentibus* (ſeu è perpendicularibus ad curvas) *Dimenſiones elicie ndas pertinentia ſe objecerunt Theoremata* ; de compluribus utiq; ſelectiora quædam.

I. Sit curva quæpiam V H (cujus axis V D, applicata H D ad V D normalis) item linea ♀ Z ↓ talis, ut ſi à curvæ puncto liberè ſumpto (putaE)ducatur recta EP ad curvam perpendicularis,& recta EAZ ad axem perpenicularis, ſit recta AZ interceptæ A P æqualis; erit *ſpatium* A D ↓ ♀ *æqualis ſemiſſi quadrati* ex recta D H. Fig. 122.

Nam ſit angulus H D O ſemirectus ; & æquiſecetur recta V D indefinitè punctis A, B, C ; per quæ ducantur rectæ E A Z, F B Z, G C Z, ad H D parallelæ ; curvæ occurrentes in E, F, G ; à quibus rectæ E I Y, F K Y, G L Y ad V D (vel H O) parallelæ ducantur ; quin & rectæ E P, F P, G P, H P curvæ V H perpendiculares ſint ; lineæ verò ſe interſecent ; ut vides. Eſtque triangulum H L G ſimile triangulo P D H (nam ob indefinitam ſectionem curvula G H pro rectâ haberi poteſt) quare H L . L G :: P D . D H. adeóque H L × D H = L G × P D ; hoc eſt H L × H O = D C × D ↓. Simili monſtrabitur diſcurſu, quoniam triangulum G M F triangulo P C G aſſimilatur, fore L K × L Y = C B × C Z ; & ſimiliter K I × K Y = B A × B Z ; itidem denùo I D × I Y = A V × A Z ; unde conſtat triangulum H D O (quod a rectangulis H L × H O + L K × L Y + K I × K Y + I D × I Y minimè differt) æquari ſpatio V D ↓ ♀ (quod itidem a rectangulis D C × D ↓ + C B × C Z + B A × B Z + A V × A Z minimè differt) ; hoc eſt $\frac{DHq}{2}$ æquari ſpatio V D ↓ ♀.

Longior diſcurſus apagogicus adhiberi poſſit, at quorſum ?

II. Iiſdem:

II. Iisdem positis, atque paratis; *summa rectangulorum* AZ × AE + BZ × BF + CZ × CG, *&c.* æquatur *trienti cubi* ex basi DH. Fig. 122.

Nam ob HL. LG:: PD. DH:: PD × DH. DHq; erit HL × DHq = LG × PD × DH. hoc est HL × HOq = DC × D↓ × DH. Similique discursu, LK × LYq = CB × CZ × CG. & KI × KYq = BA × BZ × BF, *&c.* Verùm HL × HOq + LK × LYq + KI × KYq, *&c.* adæquant trientem cubi ex DH; itaque liquet Propositum.

III. Simili ratione constabit summam AZ × AEq + BZ × BFq + CZ × CGq, *&c.* æquari $\tau\tilde{\omega}\frac{DHqq}{4}$; & esse summam AZ × AE cub. + BZ × BE cub. + CZ × CG cub. *&c.* $=\frac{DH^{\frac{5}{2}}}{5}$; ac eodem in continuum tenore.

IV. Exhinc consectantur haud aspernanda *Theoremata*: Sit VD↓φ spatium quodlibet, cujus axis VD, ut dictum, æquisectus; si concipiantur singula spatia VAZφ, VBZφ, VCZφ, *&c.* in suas ordinatas AZ, BZ, CZ, *&c.* respectivè singulas duci, quæ proveniet summa adæquabitur ipsius spatii VD↓φ semiquadrato. Fig. 122.

Nam (uti priùs ostensum) figuræ VD↓φ adaptari potest spatium VDH; tale nimirum, ut ducta quâvis ad curvam VH perpendiculari, ceu EP, sit AP sibi respondenti applicatæ AZ æqualis; (*b*) unde fiet spatium VAZφ $=\frac{AEq}{2}$; & VBZφ $=\frac{BFq}{2}$ & VCZφ $=\frac{CGq}{2}$ *&c.* quapropter omnia VAZφ × AZ + VBZφ × BZ + VCZφ × CZ, *&c.* æquabuntur omnibus $\frac{AEq \times AZ + BFq \times BZ + CGq \times CZ}{2}$ *Præced.* Lect. X. (*b*) 1 *hujus.* Fig. 122.

(*c*) hoc est $\tau\tilde{\omega}\frac{DHqq}{4\times 2}$; (*b*) hoc est $\tau\tilde{\omega}\frac{VD\downarrow\varphi \times VD\downarrow\varphi}{2}$. (*c*) 3 *hujus.*

V. Quòd si ducantur omnia $\sqrt{}$VAZφ, $\sqrt{}$VBZφ, $\sqrt{}$VCZφ, *&c.* in suas applicatas AZ, BZ, CZ, *&c.* respectivè proveniet aggregatum æquale duabus tertiis radicis quadratæ facti ex ipso spatio VD↓φ cubato ($\tau\tilde{\omega}\frac{2}{3}\sqrt{}$VD↓φ$^{\frac{3}{2}}$)

Nam adaptatâ curvâ VH, est $\sqrt{}$VAZφ = AE$\sqrt{\frac{1}{2}}$; & $\sqrt{}$VBZφ = BF$\sqrt{\frac{1}{2}}$, & $\sqrt{}$VCZφ = $\sqrt{}$CG$\sqrt{\frac{1}{2}}$, *&c.* Cùm itaque sint omnia

omnia $AZ \times AE + BZ \times BF + CZ \times CG$, &c. $= \frac{DH\ cub.}{3}$ erunt omnia $AZ \times \sqrt{VAZ\varphi} + BZ \times \sqrt{VBZ\varphi} + CZ \times \sqrt{VCZ\varphi}$, &c. $= \frac{DH\ cub}{3}\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{DH^6}{18}}$. Est autem $DHq = 2\,VD \downarrow \varphi$, vel $DH^6 = 8\,VD \downarrow \varphi^3$; quapropter omnia $AZ \times \sqrt{VAZ\varphi} + BZ \times \sqrt{VBZ\varphi} + CZ \times \sqrt{VCZ\varphi}$, &c. $= \sqrt{\frac{8}{18}}\,VD \downarrow \varphi^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{VD \downarrow \varphi^3}$.

VI. *Exempla.* Sit $VD \downarrow$ circuli quadrans (cujus radius dicatur R, & Peripheria P) segmenta VAZ, VBZ, VCZ, &c. in sinus rectos AZ, BZ, CZ, &c. ducta conficient $\frac{RqPq}{8}$. Fig. 123.

Item Summa $AZ\sqrt{VAZ} + BZ\sqrt{VBZ} + CZ\sqrt{VCZ}$, &c. $= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{R^3P^3}{8}} = \sqrt{\frac{R^3P^3}{18}}$.

Si $VD \downarrow$ sit parabolæ segmentum, factum è segmentis in applicatas erit $\frac{2}{9}\,VDq \times A \downarrow q$; ac è radicibus segmentorum in applicatas factum erit $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{8}{27}}\,VD^3 \times D \downarrow^3 \sqrt{\frac{128}{243}}\,VD^3 \times D \downarrow^3$.

Similia plura de factis è *Segmentorum potestatibus, aut radicibus aliis in applicatas, aut sinus ductis*, hinc extundi possent.

VII. E dictis porrò sequitur, si omnes (vertici, & perpendicularibus interjectæ) VP per respectiva puncta A, B, C, &c. Concipiantur applicatæ, puta ut AY, BY, CY, &c. respectivis VP æquentur; erit è sic applicatis *constitutum spatium* $AD\xi\theta$ *æquale semissi quadrati ex subtensa* VH.

Nam, ob omnes $VA + VB + VC$, &c. $= \frac{VDq}{2}$ & omnes $AP + BP + CP$ &c. $= \frac{DHq}{2}$, liquet fore omnes $VP = \frac{VHq}{2}$.

VIII. Porrò, si (positis iisdem) sit curva RXXS talis, ut sit $IX = AP$, & $KX = BP$; & $LX = CP$, &c. erit *solidum factum ex spatio*

ſpatio VD↓♀ *circa axem* VD *rotato ſubduplum ſolidi ex ſpatio* DRSH, *itidem circa axem* VD *rotato, confecti.*

Nam ob HL. LG:: PD. DH:: D↓. DH:: D↓q. D↓× DH:: D↓q. HS×DH; erit HL×HS×DH = LG×D↓q. = DC×D↓q. Simili planè diſcurſu erit LK×LX×DL = CB×CZq; & KI×KX×DK = BA×BZq, &c. atqui ſolidum prius eſt $\frac{\text{♂}}{\text{♂}}$: AZ$q$ + BZq + CZq, &c. & ſolidum poſterius eſt $\frac{2\text{♂}}{\text{♂}}$: DI×IX + DK×KX + DL×LX, &c. itaque conſtat Propoſitum.

Fig. 124. IX. Hæc itidem omnia ſimili ratione vera ſunt, etiam ſi curva VEH rectæ VD convexas ſuas partes obvertat; nempe quovis in curva accepto puncto E; & per hoc ductâ EP ad curvam VEH perpendiculari, & EAY ad rectam VD normali, factáque AZ = AP; erit ſpatium VD↓ = $\frac{\text{DH}\,q}{2}$ Sin quoque fiat AY = VP; erit ſpatium VDξ = $\frac{\text{VH}\,q.}{2}$ Et pariter quoad cætera.

Ex his verò *Theorematis quam innumerarum magnitudinum* (ex ipſarum immediatè conſtructione) *dimenſiones innoteſcant*, ab experientia facilè comperietur.

Fig. 125. X. Sit rurſus curva quæpiam VH (cujus axis VD, baſis DH) & linea DZZO talis, ut à curvæ puncto quopiam, ceu E, ductâ rectâ ET, quæ curvam tangat, & rectæ EIZ ad baſin parallelâ, ſit perpetuò IZ æqualis ipſi AT; dico *ſpatium* DHO *ſpatio* VDH *æquari.*

Æquiſecetur enim recta DH indefinitè, punctis I, K, L, per quæ ducantur rectæ EIZ, FKZ, GLZ ad VD parallelæ, curvæque occurrentes ad E, F, G, unde ducantur rectæ EA, FB, GC ad HD parallelæ, rectæque ET, FT, GT (ut & HT) *curvam tangentes*; lineæ verò ſe, ut Schema monſtrat, interſecent. Eſtque jam triangulum GLH ſimile triangulo TDH (nam ob diviſionem iſtam indefinitam arculus GH rectæ inſtar cenſeri poteſt, eatenus tangenti HT coincidens) quare LG. LH:: TD. DH; & LG×DH = LH×TD; ſeu CD×DH = LH×HO. ſimili ratiocinio eſt BC×

CG

$CG = KL \times LZ$; & $AB \times BF = IK \times KZ$, & $VA \times AE = DI \times IZ$. Verùm summa $CD \times DH + BC \times CG + AB \times BF + VA \times AE$ à spatio VDH minimè differt; & summa $LH \times DO + KL \times LZ + IK \times KZ + DI \times IZ$ à spatio DHO minimè differt. itaque spatio VDH, DHO æquantur.

Hoc *perutile Theorema* doctissimo Viro *D. Gregorio Aberdonensi* debetur; cui sequentia subnectimus.

XI. Iisdem positis; solidum ex spatio DHO circa axem VDR rotato factum duplum erit solidi facti ex spatio VDH itidem circa axem VD rotato. Fig. 125.

Nam est $HL . LG :: (DH . DT :: DH . HO ::) DHq . DH \times HO$. unde $HL \times DH \times HO = LG \times DHq = CD \times DHq$. Similique discursu sunt $LK \times DL \times LZ = BC \times CGq$. & $KI \times DK \times KZ = AB \times BFq$. & demum $ID \times DI \times IZ = VA \times AEq$. Est autem (ut vulgò notatum habetur) summa $CD \times DHq + BCB \times CGq + AB \times BFq + VA \times AEq$ dupla summæ $DI \times IE + DK \times KF + DL \times LG$, *&c.* Quare solidum ex spatio HDO circa axem DR conversò factum duplum est solidi, quod è spatio VDH circa VD conversò producitur.

XII. Hinc, summa $DI \times IZ + DK \times KZ + DL \times LZ$, &c. æquatur summæ quadratorum ex applicatis ad VD; scilicet ipsis $AEq + BFq + CGq$, &c.

XIII. Simili ratiocinio constabit summam $DIq \times IZ + DKq \times KZ + DLq \times LZ$, &c. triplam esse summæ $DIq \times IE + DKq \times KF + DLq \times LG$, &c. hoc est æqualem summæ cuborum ab omnibus AE, BF, CG, &c. ad VD applicatis. Idem quoad *reliquas potestates* observabilis est Conclusionum tenor.

XIV. Iisdem positis; si DXH sit linea talis, ut quævis ad DH ordinata, ceu IX, sit media proportionalis inter sibi congruas ordinatas IE, IZ; erit solidum ex spatio VDH circa axem DH rotato duplum solidi ex spatio DXH circa eundem axem DH converso procreati.

Nam ob $VA \times AE = DI \times IZ$, erit $VA \times AE \times EI = DI \times IZ \times IE = ID \times IXq$. Similique de causa $AB \times BF \times FK = IK \times KXq$; & $BC \times CG \times GL = KL \times LXq$, &c. Est autem summa $VA \times AE \times FI + AB \times BF \times FK + BC \times CG \times GL$, &c. Subdupla sum- *In 10. hujus.*

mæ VDq + EIq + FKq + GLq; ergò summa IXq + KXq + LXq + HXq, subdupla est summæ VDq — EIq + FKq + GLq. Vnde liquet Propositum.

XV. Quòd si curva DXH talis concipiatur, ut sit ordinata quæpiam, ceu IX, inter congruas ordinatas IE, IZ bimedia *; erit summa cuborum ex IX, KX, LX, &c. subtripla cuborum ex DV, IE, KF, &c. Sin IX sit trimed.* erit $IXqq + KXqq + LXqq, \&c. = \frac{DVqq + IEqq + KFqq}{4}$ &c. ac ità porrò quoad cæteras potestates. * *Not.* bimediam appello, quæ duarum mediarum proportionalium prima; trimediam, quæ trium prima est, &c.

Hæc simili ratione colliguntur, ac comprobantur. piget *κοπιᾶζειν*.

XVI. Sit porrò linea VYQ talis, ut ordinata AY ipsi AT; & ordinata BY ipsi BT, &c. æquentur; erit IZq + KZq + LZq, &c. (summa quadratorum ex ordinatis à curva DZO ad rectam DH) æqualis summæ VA × AE × AY + AB × BF × BY + BC × CG × CY, &c. (hoc est figuræ VDH in figuram VDQ ductæ).

XVII. Item, summa IZ. cub. + KZ cub. + LZ cub. &c. = VA × AE × AYq + AB × BE × BYq + BC × CG × CYq, &c. *hoc est figuræ* VDH *in figuræ* VDQ *quadratæ ductæ*). Similis & aliarum *potestatum* est ratio.

Ad superiorum normam hæc facilè colliges.

XVIII. Eadem vera sunt, & omnino simili ratione comprobantur, Etiam si curvæ VH convexa rectæ VD obvertantur. Nempe, si linea DZO talis sit, ut ductâ per quodvis in curva VH punctum E tangente ET, & EA ad HD parallelâ, ac EIZ ad VD parallelâ, sit perpetim IZ = AT; erit spatium DHO spatio VDH æquale; & solidum factum ex spa- DHO circa axem VR converso duplum erit solidi ex spatio VDH circa eundem axem VD rotato producti. quæ & reliqua pari modo convenient.

Fig. 126.

XIX Porrò, sit curva quæpiam AMB, cujus axis AD, & huic perpendicularis BD; tum alia sit linea KZL talis, ut sumpto in curva AB utcunque puncto M; & per hoc ductis rectâ MT curvam AB tangente, rectâ MFZ ad DB parallelâ (quæ lineam KL secet in Z, rectam AD in F) datâque quâdam lineâ R; sit TF. FM :: R.

Fig. 127.

R. FZ; erit ſpatium ADLK æquale rectangulo ex R, & DB.

Nam ſit DH = R; & compleatur rectangulum BDHI; tum aſſumptâ M N indefinitè parvâ curvæ AB particulâ ducantur NG ad BD; & MEX, NOS ad AD parallelæ. Eſtque NO. MO:: TF. FM:: R. FZ. Unde NO × FZ = MO × R; hoc eſt FG × FZ = ES × EX. ergò cum omnia rectangula FG × FZ minimè differant à ſpatio ADLK; & omnia totidem rectangula ES × EX componant rectangulum DHIB, ſatis liquet Propoſitum.

XX. *Iiſdem poſitis, ſit curva PYQ talis, ut ſumpta in ſumpta recta MX ordinata EY (reſpectivæ) ipſi FZ æquetur, erit ſumma quadratorum ex FZ (ad rectam AD computata) par ei quod fit ex ipſa R in ſpatium DBQB ducta.*

Eſt enim FG. ES:: NO. MO:: R × FZ. FZq:: R × EY. FZq. adeóque FG × FZq = ES × R × EY.

XXI. *Simili ratione ſumma Cuborum ex FZ æquatur ei quod fit ex R in ſummam quadratorum ex rectis EY ad BD applicatis.* neque non ſimili quoad reliquas poteſtates tenore.

Fig. 128.

XXII. *Sit curva quævis DOK, in qua deſignatum punctum D; & ſubtenſa recta DK; ſit item curva AE talis, ut à D projectâ quâvis rectâ DMF (quæ curvas ſecet punctis M, F) ductiſque DS ad DM normali, & MS curvam DOK tangente (concurrentibus utiq; puncto S) datâque quâdam R, ſit DS. 2R:: DMq. DFq; erit ſpatium ADE æquale ex R, DK.*

Nam ſubtenſa DK indefinitè ſecta concipiatur punctis PQ, &c. per quæ centro C deſcripti tranſeant arcus PM, QRN; curvam DOK ſecantes punctis M, N; per quæ ducantur rectæ DMF, DNG; ſint verò DT ad DK; & DS ad DM perpendiculares; quibus occurrant tangentes KT, MS. demùm centro D per E ducatur arcus EX; & per F arcus FY. Jam, ob ſectionem indefinitam, eſt triangulum KPM triangulo KDT ſimile. ac ideò MP. PK:: TD. DK. item eſt DP. PM:: DE. EX. ſeu, propter aſſignatam cauſam, DK. MP:: DE. EX. Eſt itaque MP × DK. PK × MP:: TD × DE. DK × EX. hoc eſt DK. PK:: TD × DEq. DK × EX × DE. ac inde DKq × EX × DE = PK × TD × DEq. (a) Eſt autem DT. 2R:: DKq. DEq; ſeu DT × DEq = 2R × DKq. ergò eſt DKq × EX × DE = PK × 2R × DKq. quare EX × DE = 2R × PK; hoc eſt, 2 ſector DEX = 2R × PK. unde ſector DEX = R × PK. Simili planè diſcurſu ſector DFY

(a) *Hyp.*

æquatur ipsi R × RM, vel R × QP. itaque totum spatium ADE quod ab ejusmodi sectoribus minimè differt adæquatur toti R × DK. quod erat Propositum.

Fig. 128. XXIII. Iisdem, quoad cætera, positis atque paratis, ducantur KH ad KT, & MI ad MS perpendiculares; & concipiatur jam curva AE naturâ talis, ut sit DE = √DK × DH; & DF = √DM × DI; ac ità perpetuò; erit spatium ADE quadrati ex DK subquadruplum.

Nam est MP. PK :: DK. DH :: DKq. DK × DH :: DKq. DEq. item DP. PM :: DE. EX; hoc est DK. PM :: DE. EX. ergò MP × DK. PK × PM :: DKq × DE. DEq × EX. hoc est DK PK :: DKq. DE × EX. vel DKq. DK × PK :: DKq. DE × EX. unde DK × PK = DE × EX. Simili ratione DM × MR (vel DP × PQ) = DF × FY. Verùm omnia DK × PK, DP × PQ, &c æquantur semissi quadrati ex DK; & omnia DE × EX, DF × FY, &c æquantur *duplo spatio* EDA; unde manifestè consequitur Propositum.

Fig. 129. XXIV. Sit curva quæpiam DOK, in qua punctum D; cuique subtendatur recta DK; sit item curva DZI talis, ut sumpto in curva DOK puncto quopiam M, connexâque DM; & ductâ DS ad DM perpendiculari, & MS curvam DOK tangente; sumptâ demùm DP = DM, & ductâ PZ ad DK perpendiculari, sit PZ = DS; erit *spatium* DKI æquale *duplo spatio* DKOD.

Nam recta KP concipiatur indefinitè parva; & DT ipsi DK perpendicularis sit, & KT curvam DOK tangat. Est itaque (ducto arcu MP) rursus KP. PM :: KD. DT :: KD. KI. unde KP × KI = PM × KD. Capiatur alia particula PQ, & centro D per Q ducatur arcus QN, quem secet subtensa DM in R; est ergò rursus MR. RN :: MD. DS; hoc est PQ. RN :: MD. PZ quare PQ × PZ = RN × MD; ac ità continuò deinceps. patet igitur omnia simul rectangula KP × KI, PQ × PZ, &c. æquari aggregato omnium PM × KD, RN × MD, &c. hoc est spatium DKI duplo spatio DKQD æquari.

Fig. 130. XXV. Iisdem quoad cætera positis atque paratis, ordinatæ PZ jam æquales concipiantur ipsis MS respectivis; & ad rectam assumptam Xk, distantiasque Xk, Xm, Xn, &c, æquales ipsis curvæ partibus DOK, DOM, DON, &c. applicentur rectæ kd, md, nd, &c.

pares

pares ſubtenſis K D, M D, N D; &c. erit ſpatium X *k d* æquale ſpatio D K I.

Nam eſt K M. K P:: K T. K D; hoc eſt *k m*. K P:: K I. *k d*. unde *k m* × *k d* = K P × K I. Similique pacto, M N. M R:: M S. M D. ſeu *m n*. P Q:: P Z. *m d*. unde *m n* × *m d* = P Q × P Z. ac ità deinceps. unde conſtat Propoſitum.

XXVI. Sin porrò, perſiſtentibus reliquis, adſumptâ quâvis rectâ. *k g*, completóque rectangulo X *k g h*, curva D Z I talis intelligatur, ut ſit M D. M S:: *k g*. P Z; erit rectangulum X *k g h* æquale ſpatio D K I. Fig. 130.

Nam eſt rurſus K P. K M:: K D. K T:: *k g*. K I. adeóque K P × K I = (K M × *k g* =) *k m* × *k g*. Similitérque P Q × P Z = *m n* × *k g*. ac ità ſemper. Unde conſtat.

Hinc noto ſpatio D K I cognoſcetur quantitas curvæ D O K.

Hujuſmodi verò complura deprehendet quiſquis hanc *Mineram* penitiùs explorârit, ac excuſſerit. Faciat cui id vacat & adlubeſcit.

XXVII. Uſui fortè nonnunquam erit (mihi ſubinde fuit) & hoc, è præmiſſis deductum Theorema. Fig. 131.

Sit curva quæpiam V E H (cujus axis V D, baſis D H) quam tangat utcunque recta E T; & ducatur E A ad H D parallela. tum altera ſtatuatur curva G Z Z, talis, ut à puncto E ductâ rectâ E Z ad V D parallelâ (quæ baſin D H in I, curvam G Z Z in Z ſecet) adſumptâq; quâpiam determinatâ R, ſit ſemper D A q. R q:: D T. I Z; erit D A. A E:: R q. ſpat. D I Z G. (vel facto D A. R:: R. D P; ductâque P Q ad D H parallelâ, erit *Rectangulum* D P Q I par *ſpatio* D G Z I).

Etiam hoc adjiciatur *Theorema*; nonnunquam uſui futurum.

XXVIII. Sit curva quælibet A M B (cujus axis A D); ſit item linea K Z L proprietate talis, ut ſumpto in A M B quocunque puncto M, & ab eo ductis rectâ M P ad curvam A B perpendiculari (quæ axem A D ſecet in P) & rectâ M G ad A D perpendiculari (quæ curvam K Z L ſecet in Z) ſit conſtantèr G M. M P:: arc A M. G Z; erit *ſpatium* A D K L æquale *ſemiſſi quadrati* ex arcu A M. Fig. 132.

Hæc inquam, è præcedentibus haud magnâ operâ colligantur, id verò ſufficiat admonitum; etenim hic animus eſt paulò ſubſiſtere.

APPEN-

APPENDICULA.

I. CUm pridem ante plures annos illustris Viri, *Christiani Hugenii*, *Cyclometrica* lustrarem, ac in eo versatus adverterem ad id negotii duas præsertim ab ipso methodos adhiberi; quarum una *Circuli segmentum* duobus parabolicis (uni inscripto, alteri adscripto) medium esse monstrans, illius inde magnitudini limites præscribit; altera *Parabolici segmenti*, & *Parallelogrammi* æquè altorum centris gravitatum medium interjacere centrum gravitatis circularis segmenti ostendens, alteros exindè limites, adsignat; incidit mihi cogitatio posse loco parabolæ in prima methodo, nec non vice Parallelogrammi in secunda, paraboliformium aliquam circulari segmento circumscriptibilem usurpari, sic ut res aliquanto propiùs attingatur; id mox verum esse re perpensâ comperi; quin & præterea notavi facilè suppares methodos *Hyperbolici segmenti dimensioni* accommodari. Quorum demonstratio (præ aliis fortasse, quæ excogitari possent) brevis & clara cùm è suprà positis consequatur aut pendeat, eam (alioquin opinor haud injucundam) hîc visum est apponere.

II. Adsumimus autem hæc pervulgata; quorúmque demonstrationes è præmonstratis haud difficilè variis modis colligantur; si *paraboliformis* BAE (cujus *Axis* AD, *Basis* vel ordinata BDE, *Tangens* BT; *Gravitatis centrum* K) exponens sit $\frac{n}{m}$; erit *Area* BAE $= \frac{m}{n+m}$ AD × BE; & TD $= \frac{m}{n}$ AD, & KD $= \frac{m}{n+2m}$ AD. Fig. 133.

III. Sint duæ quævis curvæ AEB, AFB (quarum communis axis AD, ordinata DB) ità se habentes, ut ductâ quâcunque rectâ EFG ad BD parallelâ, quæ lineas expositas punctis E, F, G secet, positóque quòd rectæ ES, FT tangant curvas, (illa curvam AEB, hæc ipsam Fig. 134.

ipſam AFB) ſit perpetuo TG major quàm SG; dico nullam curvæ AFB partem intra ipſam AEB cadere.

Si fieri poteſt, cadat pars NFM; ità ſcilicet ut curva AFB curvam AEB interſecet punctis M, N; his autem interjecta concipiatur indeterminatè ordinata EFG; ſint verò lineæ LXK, RYQ tales, ut ductis rectis EO, FP ad ipſas ES, FT perpendicularibus, protractâque rectâ EG, ut hæc dictas lineas LK, QR ſecet punctis X, Y; ſit GX = GO, & GY = GP. Jam ex oſtenſis patet eſſe *ſpatium* $IHKL = \frac{HMq - INq}{2}$ = ſpat.IHQR; adeóq; ſpat.IHKL, IHQR æquari. Verùm ob GE. GO(GX):: SG; GE. ⊐SG. GF ⊐TG.GF:: GF.GP (GY) ⊐GE.GY; eſt GX ⊏ GY; adeòque (cùm hoc ubique ſimiliter contingat) ſpatium IHKL majus ſpatio IHQR; quod repugnat oſtenſo. itaque liquet Propoſitum.

Hinc tota AFB extra totam AEB jacet, nec illa hanc uſquam interſecat.

IV. Sit curva quæpiam BAE, cujus axis AD, & ad hunc ordinata baſis ADE; ſegmenti verò BAE centrum gravitatis ſit punctum H, qer quod ducta ſit recta RS ad BE parallela. Porrò per puncta R, S tranſeat altera curva (vel linea quævis) MRASN, habens itidem axin AD, ac ità priorem curvam BAE ſecans, ut ejuſce pars ſuperior RKAPS intra curvam BAE cadat, inferiores verò reliquæ partes RM, SN extra eandem; erit ſegmenti MRASN centrum gravitatis infra punctum H, verſus baſin MN. Fig. 135.

Nam è ſegmento RIAOS ablatum RIAK + AOSP reſiduum BRKAPSE deprimet verſus baſin BE, puta ut jam ſit hujus reſidui *Centrum gravitatis* ad X; tunc adjunctum BRM + ESN adhuc totum MRKAPSN magis deprimet; adeóque centrum ejus infra X conſiſtet, velut ad Y. itaque conſtat Propoſitum.

V. *Circulum* AFB, cujus *Centrum* C, tangant duæ rectæ BT, ES *Diametro* CA occurrentes punctis T, S; & ad CA perpendiculares ſint rectæ BD, EP; ſit autem AD major quàm AP; erit TD. AD ⊏ SP. AP. Fig. 136.

Nam eſt CT. CA:: CA. CD. Ideoque CT − CA. CA − CD:: CT. CA, hoc eſt TA. AD:: CT. CA. Simili ratione conſtabit eſſe SA. AP:: CS. CA. Eſt autem CT. CA ⊏ CS. CA. quare TA. AD ⊏ SA. AP. vel componendo TD. AD ⊏ SP. AP.

VI. *Hyper-*

VI. *Hyperbolam* AEB, cujus *Centrum* C, tangant duæ rectæ BT, ES, & reliqua ponantur ut in proximè præcedente; erit TD: AD ⊐ SP.AP.

Fig. 137.

Nam est CA. CD :: CT. CA. unde CA — CT. CD — CA :: CT. CA; hoc est TA. AD :: CT. CA. suppare discursu, est SA. AP :: CS. CA. Verùm est CT. CA ⊐ CS. CA. quare TA. AD ⊐ SA. AP; seu componendo TD. AD ⊐ SP. AP.

VII. *Circuli* AEB (cujus *Centrum* C) & *paraboliformis* AFB communes sint axis AD, & basis BD; sit autem *paraboliformis* exponens $\frac{n}{m}$; & $AD = \frac{m-2n}{m-n} CA$ (vel $m-n . m-2n ::$ CA. AD) *circulum* verò tangat recta BT; hæc quoque *paraboliformem* AFB continget.

Fig. 138.

Nam quia BT *circulum* tangit, est CT. CA :: CA. CD; unde TA. AD :: CA CD. componendoque TD. AD :: CA + CD. CD. Item, quoniam est (ex hypothesi) CA. AD :: $m-n . m-2n$; erit per rationis conversionem CA. CD :: $m-n . n$. & componendo CA + CD. CD :: $m . n$. hoc est TD. AD :: $m . n$. unde (a) palam fit, quòd BT *paraboliformem* AFB tangit.

(a) 2 *hujus ap.*

VIII. Subnotetur, quòd inversè, datâ ratione ipsius AD ad CA' designabitur hinc *paraboliformis*; quæ *Circulum* AEB ad B continget. Nempe, si $AD = \frac{s}{t}$, erit $\frac{t-s}{2t-s}$ dictæ *paraboliformis* exponens. Nam posito fore $\frac{t-s}{2t-s} = \frac{n}{m}$; erit ideò (juxta crucem multiplicando) $mt - ms = 2tn - sn$; & transponendo $mt - 2nt = ms - ns$. ac ideò (æqualitatem ad analogismum redigendo) $m-n . m-2n :: t . s ::$ CA. AD. itaque constat ex antecedente Propositum.

IX. Manente quoad cætera septimæ hypothesi, *paraboliformis* AFB extra *circulum* AEB tota cadet.

Fig. 139.

Nam utcunque ducatur recta GEF ad DB parallela; quæ secet circulum ad E, paraboliformem in F; ductæque concipiantur rectæ ES *circulum*, & recta FR *paraboliformem* contingentes; Estque RG.

RG.AG::(a) $m.n$::TD.AD (b) ⊏ SG.AG. quare RG ⊏ SG. unde (c) patet tota AFB extra circulum AEB jacere.

(a) 2. *hujus. app.*
(b) 5. *hujus ap.*
(c) 3. *hujus ap.*

X. Reliquis itidem ſtantibus, ſi ad baſin GE (utcunque parallelam ipſi DB) & axem AD conſtituta intelligatur *paraboliformis* ejuſdem cum ipſa AFB generis (nempe cujus etiam exponens $\frac{n}{m}$) illa ad partes A ſupra GE, extra *circulum* tota jacebit. Fig. 139.

Nam in arcu AE accepto quocunque puncto M, ductâque MP ad EG parallelâ, & MV circulum tangente; eſt VP. AP ⊐ SG. AG ⊐ RG.AG::$m.n$; (a) itaque rurſus liquet Propoſitum.

(a) 3. *hujus ap.*

XI. Conſectatur etiam dictam (ipſi AFB coordinatam & ad baſin GE conſtitutam) *paraboliformem* infra GE ad DB protractam, eatenus intra *Circulum* totam cadere, Fig. 139.

Quòd intra *Circulum* ſtatim infra EG cadet ex eo patet, quòd ipſam tangens RE circulum ſecat (quia nempe SE circulum tangit). quòd alibi *Circulo* non occurret hinc patet; quoniam poſito quòd occurrat uſpiam ad N, (a) tota ſupra N extra circulum caderet, contra quam modò dictum ac oſtenſum eſt.

(a) 3. *hujus ap.*

XII. Porrò, *Hyperbolæ* AEB (cujus centrum C) & *paraboliformis* AFB, cujus exponens $\frac{n}{m}$, communes ſint axis AD, baſis DB; Fig. 140.

ſit autem AD $= \frac{2n - m}{m - n}$ CA; & BT *hyperbolam* tangat; hæc quoque *paraboliformem* AFB continget.

Nam eſt CD.CA::CA.CT. ac indè AD.TA::CD.CA; inverſéq; componendo TD.AD::CA + CD.CD. Verùm ex hypotheſi, eſt $m - n . 2n - m$::CA.CD; adeoque inversè componendo CA.CD::$m - n . n$: & rurſus componendo CA + CD.CD::$m.n$. hoc eſt TD.AD::$m.n$. unde BT *hyperboliformem* contingit.

XIII. Hinc rurſù datà ratione ipſius AD ad CA, *paraboliformis* ad punctum B *hyperbolam* contingens deſignabitur. nempe ſit AD $= \frac{s}{t}$ CA; erit $\frac{n}{m} = \frac{t + s}{2t + s}$. Nam hoc ſuppoſito erit (σταυρηδὸν

O mul-

multiplicando) $2tn + sn = mt + ms$. vel transponendo $2nt - mt = ms - ns$. unde $m - n . 2n - m :: t . s ::$ CA.AD. ergò patet ex antecedente.

XIV. Stante duodecimæ hypotheſi, *paraboliformis* AFB intra hyperbolam AEB tota cadet.

Fig. 141. Nam utcunque ducatur EFG ad BD parallela; & recta ER *hyperbolam*, recta FS *paraboliformem* tangant. Eſtque SG.AG :: (*a*) $m . n ::$ TD.AD (*b*) $\sqsupset$ RG.AG, unde RG $\sqsubset$ SG. (*c*) unde curva AEB extra curvam AFB tota cadet.

(*a*) 2. *hujus ap.* (*b*) 6. *hujus ap.* (*c*) 3. *hujus ap.*

XV. Etiam, ſi reliquis perſtantibus, ad baſin GE, axin AG conſtitutam imagineris ejuſdem ordinis *paraboliformem*; hæc ad partes ipsâ GE ſuperiores intra *hyperbolam* tota cadet.

Fig. 141.

Nam ſi in *curva hyperbolica* AE ſumatur ubicunque punctum M, & ordinetur MP, ducatúrque hyperbolam tangens MV; erit VP. AP $\sqsubset$ *m . n.* adeoque rurſus è tertia liquet Propoſitum.

XVI. Quinetiam ſi hæc altera coordinata *paraboliformis*, ad baſin EG conſtituta, ad DB protracta concipiatur, ejus ipſis EG, BD intercepta pars extra *hyperbolam* tota cadet.

Fig. 141.

Nam quòd extra *hyperbolam* infra EG cadit, exinde patet, quòd ipſa cum ipſius tangente recta ES angulum efficit minorem eo, quem eadem recta ES efficit cum recta RE hyperbolam tangente. quòd autem eadem alibi, velut ad N, *hyperbolæ* non occurrit, patet; quoniam hoc poſito, (*a*) ipſa intra *hyperbolam* AN tota conſiſteret, contra quàm mox oſtenſum eſt.

(*a*) 3. *hujus ap.*

XVII. Habeant *Circulus* AEB, & *Parabola* AFB communem axem AD, & baſin DB; *parabola* ad partes ſupra BD intra *Circulum*; at infra BD extra *circulum* cadet.

Fig. 142.

Sit enim *Circuli Diameter* AZ, & ei æqualis AH ad BD parallela, & connectatur ZH; & huic BD producta ad I; ergo DI eſt *Parameter parabolæ* AFB. quòd ſi ſupra BD utcunque ducatur recta EFGK ad BD parallela circulum ſecans in E, parabolam in F, rectas AZ, HZ, in G, & K, patet eſſe GEq = AG × GK $\sqsubset$ AG × DI = GFq. unde GE $\sqsubset$ GF. Item, ſi infra BD utcunque ducatur recta MNOL ad BD parallela *parabolam* ſecans in M, *circulum* in N, rectas AZ, HZ in O, & L, itidem patet eſſe MOq = AO × DI $\sqsubset$ AO × OL = NOq. & ideò MO $\sqsubset$ NO.

$\sqsubset$ NO. quare liquent ea, quæ Propoſita ſunt.

Si *Circulo* ſubſtituatur *Ellipſis*, eadem concluſio valet idem diſcurſus probat; poſitâ AH *Ellipſis parametro.*

XVIII Habeant *hyperbola* AEB (cujus axis AZ, parameter AH) & *parabola* AFB axin eundem AD, & baſin DB, *parabola* ſupra DB tota extra *hyperbolam* cadet, extra verò, ſi infra DB protrahatur. Fig. 143.

Nam connexæ ZH occurrat BD in I; ergò DI eſt *parabolæ parameter.* Quòd ſi ſupra BD utcunque ducatur recta FEGK ad BD parallela, ſecans hyperbolam in E, parabolam in F, rectas AD, ZH punctis G, K, erit $FGq = AG \times DI \sqsubset AG \times GK = EGq$. quare $FG \sqsubset EG$. Quòd ſi infra BD, utcunque ducatur recta MNOL ſecans hyperbolam in N, parabolam in M, rectas AD, ZH in O, & L, erit $NOq = AO \times OL \sqsubset AO \times DI = MOq$. & indè $NO \sqsubset MO$. unde conſtant ea quæ propoſita ſunt.

XIX. E dictis eliciuntur hæ *ad Circuli dimenſionem pertinentes regulæ.* Sit BAE circuli portio, cujus axis AD, baſis BE; ſitque C centrum circuli, & EH ſinus rectus arcus BAE; item, ſit $AD = \frac{s}{t}CA$; erit 1. $\frac{2t-s}{3t-2s}AD \times BE \sqsubset$ port. BAE. Fig. 144.

2. $EH + \frac{4t-2s}{3t-2s}BH \sqsubset$ arc. BAE.

3. $\frac{2}{3}AD \times BE \rightharpoondown$ port. BAE.

4. $EH + \frac{4}{3}BH \rightharpoondown$ arc. BAE.

XX. Itidem hæ deducuntur ad *hyperbolæ dimenſionem ſpectantes regulæ.* Sit *hyperbolæ* (cujus centrum C) ſegmentum ADB, habens axin $AD = \frac{s}{t}CA$; & baſin DB; Fig. 145.

erit 1. $\frac{2t+s}{3t+2s}AD \times DB \rightharpoondown$ ſegm. ADB. &

2. $\frac{2}{3}AD \times DB \sqsubset$ ſegm. ADB.

XXI. Porrò, ſit *circuli* (cujus centrum C) ſegmentum B A E, cujus axis A D, & *gravitatis centrum* K; ponatur autem $AD = \frac{s}{t} CA$, & $HD = \frac{2t-s}{5t-3s} AD$; erit H D major ipsâ K D.

Fig. 146. Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela; éſtque punctum
(a) 2. *hujus ap.* H (a) centrum *gravitatis paraboliformis*, (puta A F B) ad baſin B E
conſtitutæ, cujus exponens $\frac{t-s}{2t-s}$ &(b) quæ proinde circulum AEB
(b) 8. *hujus ap.* tangit; (nam ſi $\frac{t-s}{2t-s} = \frac{n}{m}$; erit $\frac{2t-s}{5t-3s} = \frac{m}{n+2m}$) & proinde H (a) erit centrum gravitatis *paraboliformis* iſti coordinatæ per O, P tranſeuntis, & ad baſin B E pertingentis. Hæc autem ſupra O
(c) 10. *hujus ap* P (c) extra *circulum* cadit, & infra O P (d) intra ipſum; (e) adeóque
(d) 11 *hujus ap* punctum H ſupra K ſitum eſt.
(e) 4. *hujus ap.*

Fig. 146. XXII. Sin punctum L ſit *centrum gravitatis parabolæ*, erit L infra K ſitum; adeóque $KD \sqsubset \frac{2}{5} AD$. Patet ex 4, & 17 hujus appendiculæ.

Fig. 147. XXIII. Sit *Hyperbola* (cujus centrum C) *ſegmentum* B A E, cujus axis A D, baſis B E; gravitatis centrum K; ponatur autem $AD = \frac{s}{t} CA$, & $HD = \frac{2t+s}{5t+3s} AD$; erit H D minor ipsâ K D.

(a) 2. *hujus ap.* Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela (a). Eſtque punctum H centrum gr. *paraboliformis*, puta A F B, ad baſin D B conſtitutæ,
(b) 13. *hujus ap* cujus exponens $\frac{t+s}{2t+s}$; (b) quæ & *Hyperbolam* ad B contingit (nam ſi $\frac{t+s}{2t+s} = \frac{n}{m}$; erit $\frac{2t+s}{5t+3s} = \frac{m}{n+2m}$) (a) quare H erit centrum gravitatis paraboliformis iſti coordinatæ per O, P ductæ, & ad B E
(c) 15. *hujus ap.* pertingentis. hæc autem ſupra O P (c) intra hyperbolam cadit;
(d) 16 *hujus ap* & infra O P (d) extra illam; (e) inde punctum K ſupra H
(e) 4. *hujus ap.* exiſtit.

XXIV. Parabolæ centrum gr. (puta L) ſupra K exiſtit, adeóque $KD \sqsupset \frac{2}{5} AD$. Patet ex 4, & 18 hujus appendiculæ.

XXV. Nè

XXV. Nè ſpeculatio præſens, *ob hujuſmodi complures methodos Cyclometricas indies promulgatas*, aſpernanda videatur, adjungemus conſectarium unum vel alterum, quibus fortè ſolis hæc paucula meruerant impendi; à quibus nempe *Maxima, Minimaque* ſui generis innumera determinantur. Fig. 148.

Sit *Semicirculus* ABZ, cujus centrum C; ſitque *ſegmentum* ADB; & huic adſcripta *paraboliformis* AFB, cujus exponens $\frac{n}{m}$; ſit item $AD = \frac{m-2n}{m-n} CA$; *paraboliformis* autem *parameter* (hoc eſt recta, cujus aliqua poteſtas in poteſtatem ſegmenti axis, ſeu AD, ducta conficit *poteſtatem* ordinatæ, ceu DB) nominetur p; erit p in ſuo genere *maximum*.

Nam utcunque ducatur GE ad DB parallela, & ad GE poſita concipiatur *paraboliformis*, ipſi AFB coordinata, cujus *parameter* dicatur q. quum ergò *paraboliformis* AFB *circulum* extrorſum contingat, erit $GF \sqsubset GE$; adeóque $GF^m \sqsubset GE^m$; hoc eſt $p^{m-n} \times AG^n \sqsubset q^{m-n} \times AG^n$; quare $p \sqsubset q$.

Notandum eſt eſſe $p^{2m-2n} = ZD^m \times AD^{m-2n}$. & $q^{2m-2n} = ZG^m \times AG^{m-2n}$. unde $ZD^m \times AD^{m-2n} \sqsubset ZG^m \times AG^{m-2n}$, quare $ZD^m \times AD^{m-2n}$ eſt maximum.

Exemp. 1. Sit $n = 1$, & $m = 3$. erit ideò $p^2 = ZD^1 \times AD = ZDq \times BDq$; vel $p^2 = ZD \times BD$. Item $AD = \frac{1}{2} CA$.

2. Sit $n = 3$, & $m = 10$. erit $p^{14} = ZD^{10} \times AD^4$. vel $p^2 = ZD^{\frac{5}{7}} \times AD^{\frac{1}{7}} = ZD^1 \times BD^4$. & $AD = \frac{4}{7} CA$.

XXVI. Sit item *hyperbola* (æquilatera) cujus centrum C, axis ZA; & huic inſcripta *paraboliformis* AFB cujus exponens $\frac{n}{m}$ *parameter* p; ſitque $AD = \frac{2n-m}{m-n} CA$; erit p ſui generis maximum. Fig. 149.

Nam utcunque ducatur EG ad BD parallela; & ad EG conſtituta intelligatur *paraboliformis*, ipſi AFB coordinata, cujus *parameter* q. quum ergo *paraboliformis* AFB *hyperbolam* introrſum contingat, erit $GF^n \sqsupset GE^n$; hoc eſt $p^{m-n} \times AG^n \sqsupset q^{m-n} \times AG^n$; quare $p \sqsupset q$.

Notandum

Notandum est esse $p^{\frac{2m-2n}{n}} = \frac{ZD^m}{AD^{2n-m}}$. & $q^{\frac{2m-2n}{n}} = \frac{ZG^m}{AG^{2n-m}}$. unde erit $\frac{ZD^m}{AD^{2n-m}} = \frac{ZG^m}{AG^{2n-m}}$. quare $\frac{ZD^m}{AD^{2n-m}}$ est minimum.

Fig. 149.

Exemp. 1. Sit $n = 2$; & $m = 3$; erit $p^2 = \frac{ZD^3}{AD}$. $= \frac{BD^6}{AD^4}$. & $p = \frac{BD^3}{ADq}$. $= \frac{ZDq}{BD}$. Item AD = CA.

2. Sit $n = 3$; & $m = 4$; erit $p^2 = \frac{ZD^4}{AD^2}$ vel $p = \frac{ZD^2}{AD}$ $= \frac{BD^4}{AD^3} = \frac{ZD^3}{BD^2}$. Item AD = 2 CA.

3. Sit $n = 5$, & $m = 8$; erit $p^{\frac{6}{5}} = \frac{ZD^8}{AD^2}$. vel $p^3 = \frac{ZD^4}{AD}$ $= \frac{BD^8}{AD^5} = \frac{ZD^5}{BD^2}$. Item AD = $\frac{2}{3}$ CA.

Quoniam in his *Cyclometriam* attigi, quid si obiter eò spectantia *Theoremata*, quæ ad manum, paucula subjunxero? præsternatur autem autem hoc καδολικὸν:

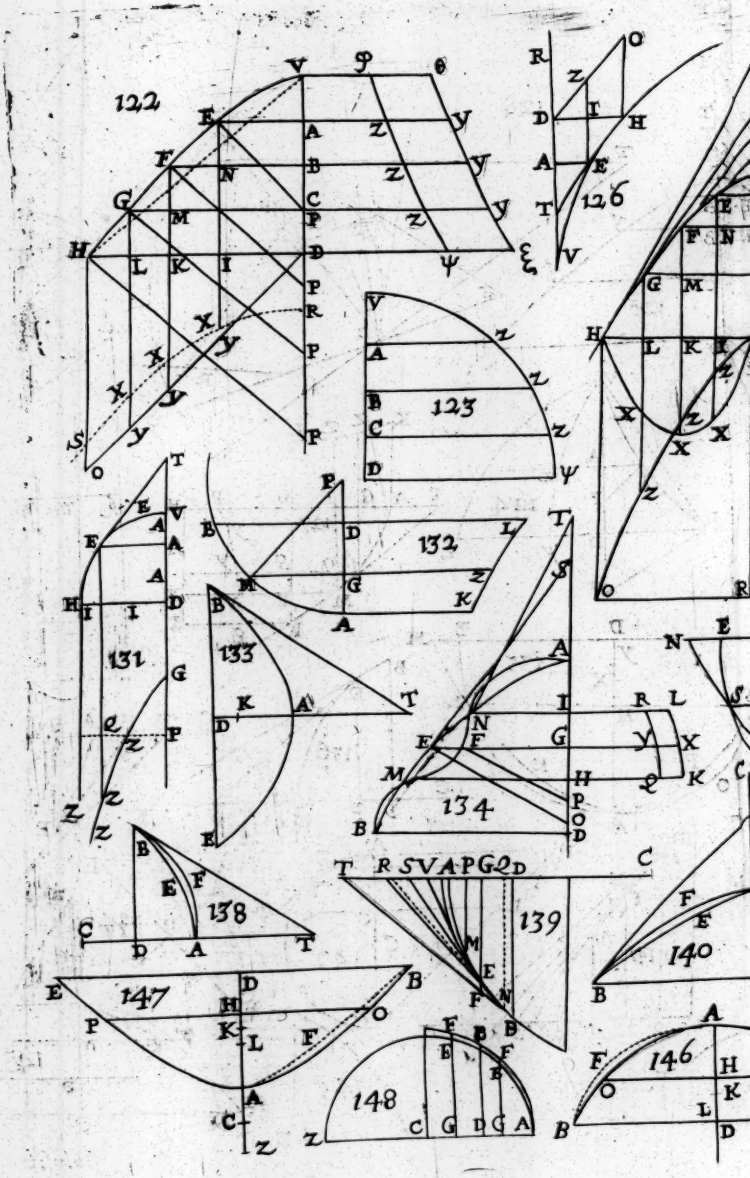
Fig. 150.

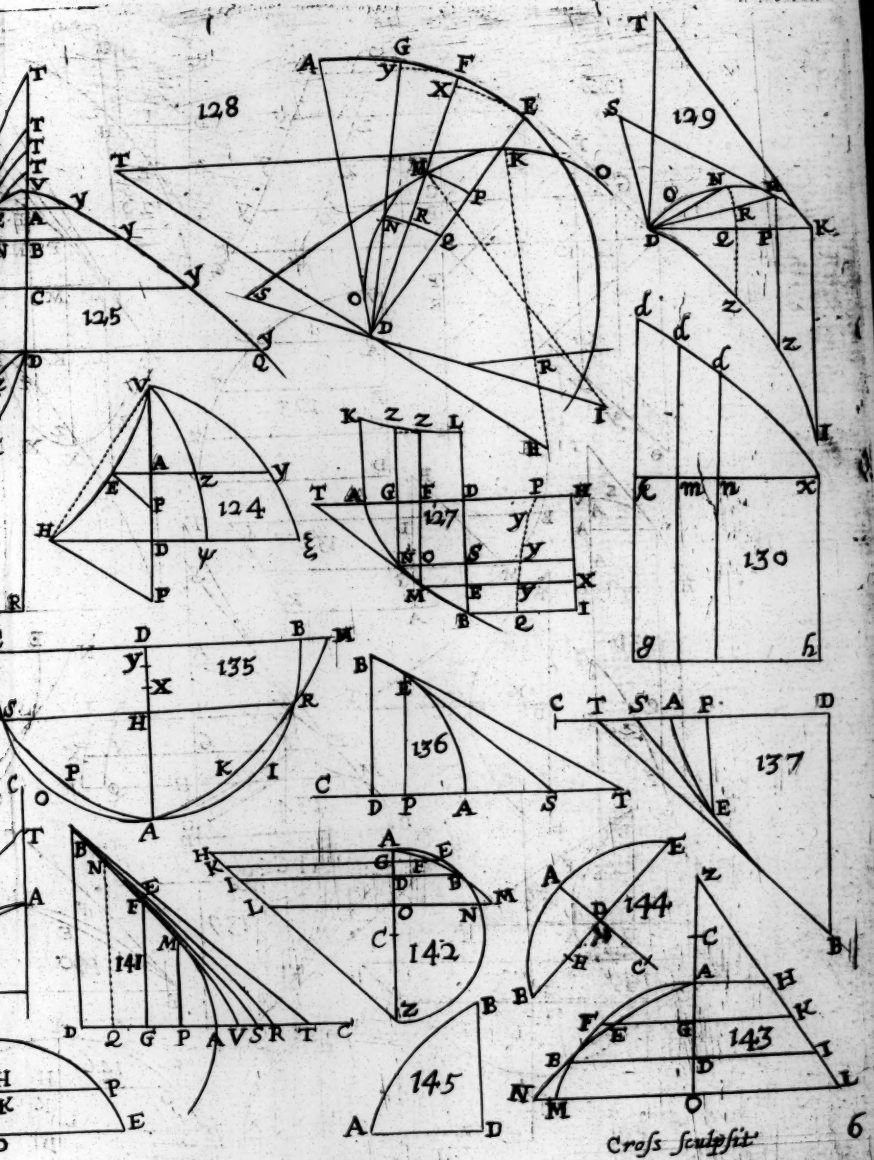
Sit curva quæpiam AGB, cujus axis AD, & ad hunc ordinatæ rectæ BD, GE; Habebit curva AB ad curvam AG majorem rationem quàm recta BD ad rectam GE.

Nam ducatur recta GH ad AD parallela: secentúrque recta BH punctis Y, & recta GE punctis Z in particulas indefinitè multas; pérque puncta Y, Z ducantur rectæ YM, YN, ZO, ZP ad AD parallelæ: curvam intersecantes punctis M, N, O, P; per quæ ducantur rectæ MR, NS, OT, PV ad BD parallelæ. Estque angulus BMY (ut è superiùs ostensis liquet) minor angulo NGS, unde MB.BY ⊏ GN.NS. Similique de causa est NM. MR ⊏ GN.NS.* quare conjunctè est BM + MN + NG.BY + MR + NS ⊏ GN.NS; hoc est arc. GB.BH ⊏ GN.NS. rursus (è discursu consimili) ratio GN ad NS major est singulis rationibus OG ad GZ, OP ad PT, & AP ad PV; idcircoq; junctè est GN.NS ⊏ arc. AG.GE. quapropter erit GB.BH ⊏ AG.GE. permutandòque GB.AG ⊏ BH.GE. quare componendo est AB.AG ⊏ BD.GE.

* Vid. *Append.* Lect. XII.

XXVIII.


122
123
126
131
132
133
134
138
139
140
146
147
148



Cross sculpsit.

XXVIII. Sit *Circulus* AMB, cujus *Radius* CA, & ad hunc perpendicularis recta DBE; ſit item curva ANE talis, ut ductâ utcunque rectâ PMN ad DE parallelâ (quæ circulum ſecet in M, dictam curvam in N) ſit recta PN æqualis *Arcui* AM; ſit demum *axe* AD, *baſe* DE deſcripta *Parabola* AOE, hæc extra curvam ANE tota cadet. Fig. 151

Nam ſecet recta PN parabolam in O; & connectantur ſubtenſæ AB, AM; eſtque DE. PN :: arc. AB. arc. AM ⊏ AB. AM :: DE. PO. quare PN ⊐ PO; unde liquet Propoſitum.

XXIX. Exhinc (& è vulgò notis *ſpatiorum* ADB, ADE *dimenſionibus*) facilè colligitur hæc regula: $\frac{3\,CA \times DB}{2\,CA+CD}$ ⊐ arc. AB. Fig. 152.

Porrò ſi ponatur arc. AB = 30 grad. ſitque 2 CA = 113; juxta regulam iſtam computando, proveniet *tota circumferentia* major quàm 355, minus fractione unitatis.

XXX. Hinc etiam *dato arcu* AB, nominatiſque AB = p; CA = r; & DB = e, ad inveniendum *ſinum rectum* DB adhibebitur hæc æquatio; $\frac{3rrpp}{9rr+pp} = \frac{12rrp}{9rr+pp}e - ee$. vel ponendo $k = \frac{3rrp}{9rr+pp}$; erit $kp = 4ke - ee$. vel $2k - \sqrt{4kk - kp} = e$.

XXXI. Sit AMB *Circulus*, cujus Radius CA, & huic perpendicularis recta DBE; ſit item curva ANE pars *Cycloidis* ad *Circulum* AMB pertinentis; demum ad axem AD, baſin DE ſtatuatur *Parabola* AOE; hæc intra *Cycloidem* tota cadet. Fig. 153.

Etenim utcunque ducatur recta PMON ad DE parallela, lineas expoſitas ſecans, ut cernis; connectantúrque *ſubtenſæ* AB, AM; eſtque DE. PO :: AB. AM :: curv. AE. AN ⊏ DE. PN; adeoque PO ⊐ PN. unde conſtat Propoſitum.

XXXII. Exhinc, & è *notis ſegmentorum circularis atque Cycloidalis dimenſionibus*, hæc elicitur *Regula* $\frac{2\,CA \times DB + CD \times DB}{CA+2\,CD}$ ⊏ arc. AB.

Porrò ſi fuerit arc. AB = 30 grad. & ponatur 2 CA = 113; è regula hac conſectatur fore *totam circumferentiam* minorem quàm 355, plus fractione.

Vides igitur ut è propoſitis duabus regulis ſtatim emergit *Diametri* ad *Circumferentiam Proportio Metiana*.

XXXIII. Quoniam exorbitanti ſe obviam dedit *Cyclois* hoc adnotabo *Theorema*, neſcio an uſpiam ab illis, qui de *Cycloide* tam fusè ſcripſerunt, animadverſum: Completo *Rectangulo* ADEG, *ſpatium*

AEG

AEG æquatur *Circulari ſegmento* ADB demonſtrationem, ne longiùs evager, obmittam.

Fig. 154. XXXIV. Sint duo *circuli* AIMG, AKNH ſeſe contingentes ad A; communique diametro A H G, utcunque perpendicularis ducatur recta D N M: habebit *ſegmentum* A I M D ad *ſegmentum* AKND minorem rationem, quam recta DM ad rectam D N.

Nam ſit A R ad AG perpendicularis, ac ipſi A H æqualis; & connectatur H R, cui occurrat recta M D in X; ducatúrque recta G X S; tum ad axem A G *parametrum* A S per N deſcripta concipiatur *Ellipſis* A L N G; hæc (utì ſatis manifeſtum) intra arcum A K N tota cadet. Eſt autem ſegm. A I M D. ſegm. A L N D:: D M. D N. ergo ſegm. A I M D. ſegm. A K N D ⌐ DM. DN.

Fig. 154. XXXV. Sit Ellipſis YFZT, cujus axes conjugati YZ, FT; ſit item recta DC axi majori Y Z parallela; & per D, F, C tranſeat circulus DFCV centrum habens K, in ellipſis axe minore F T ſitum; dico circuli partem DOFPC intra ellipſis partem DMFNC jacere.

Nam ſit FI ad FV perpendicularis, & in hac ſumatur FS = FV; & connectatur V S, cui DC producta occurrat in X; & connexa T X ipſi FI occurrat in R. & cum ſit G D q = F G × G V = F G × GX; liquet ipſam FR eſſe ellipſis, axi F T congruam, parametrum; unde conſtat Propoſitum.

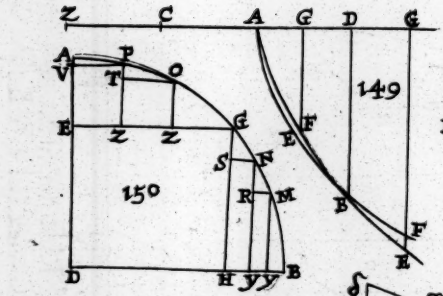
Fig 155. XXXVI. Sit circuli, cujus centrum L, ſegmentum DEC, & ſumpto in ejus axe GE puncto quopiam F, ſit curva DMFC talis, ut ductâ utcunque rectâ RMS ad G E parallelâ, ſit R S. R M :: G E. G F; erit DMFC ellipſis, hoc modo determinata: Fiat E G. F G :: G L. G H; & per H erigatur YHZ ad DC parallela, ſitque HY par ipſi LE; erunt HY, HF ellipſis ſemiaxes.

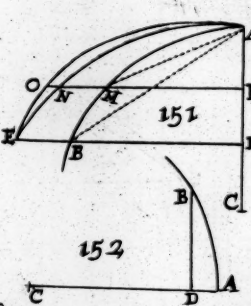
Demonſtratum habetur à *Greg. à S. Vincentio*, L. IV. Prop. 154. *Corol.* Hinc ſegm. DEC. DMFC :: EG. FG.

XXXVII. Sint duæ circulorum portiones DEC, DOFC, quarum communis ſubtenſa DC, & axis GFE; portio major DEC ad portionem DOFC majorem rationem habet eâ, quam habet axis G E ad axem G F.

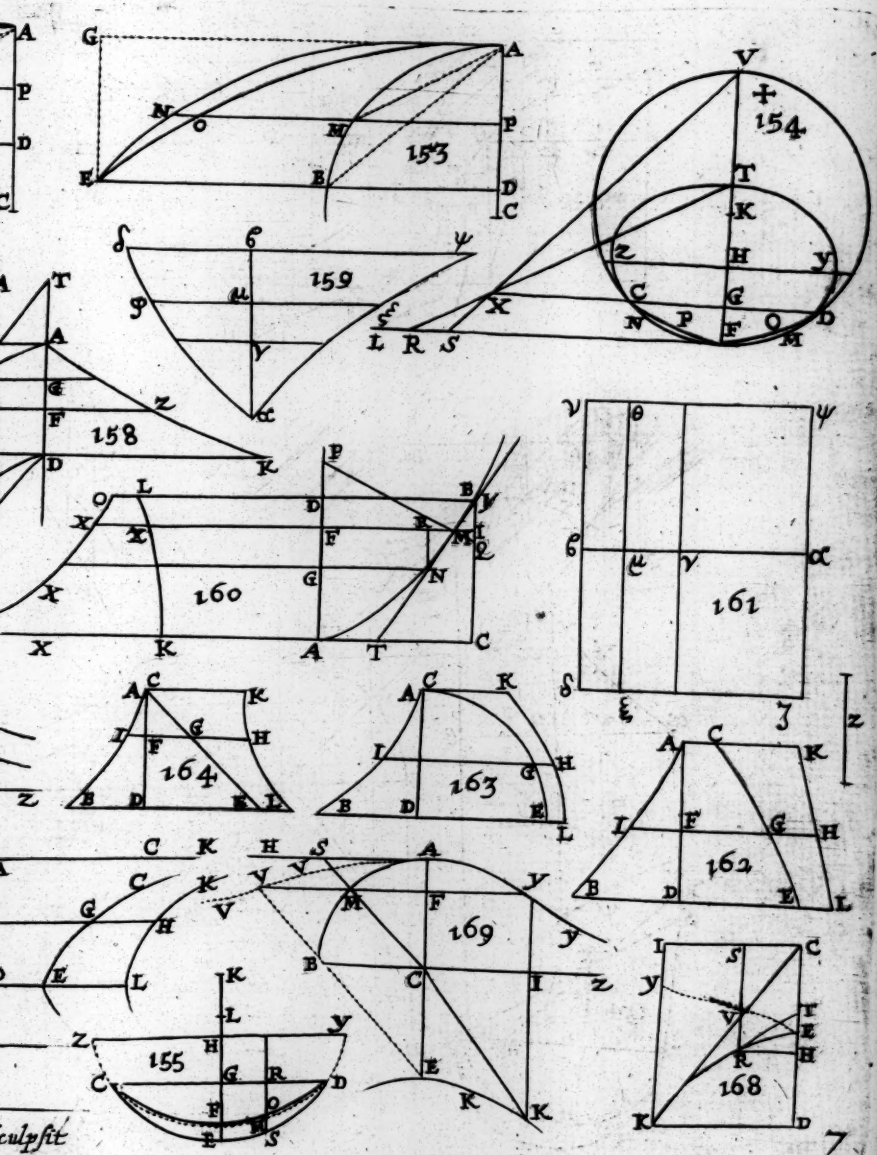
Nam ſint L circuli DSEC, & K circuli DOFC centra; & fiat EG. FG :: GL. GH; & fiat YHZ ad H perpendicularis, & ſit HY æqualis ipſi LE; tum ſemiaxibus HY, HF deſcripta concipiatur ellipſis YDMFCZ; è mox prædictis liquet ellipſin DMFC circulo DOFC circumduci. Eſt autem circulare ſegmentum DEC ad ſegmentum ellipticum DMFC, ut GE ad GF; quare ſegm DEC ad ſegm circulare DOFC. rationem habet majorem, quam GE ad GF: Quod. E. D.

LECT.





Croſs ſcu



culpsit

LECT. XII.

IN ſuſcepto negotio progredimur; quod ut (quatenus licet) decurtemus, verbíſque parcamus; obſervetur, in ſequentibus ubique *lineam* A B *curvam* eſſe (qualem tractamus) quampiam; cujus *Axis* AD; huic applicatas omnes rectas B D, C A, M F, N G perpendiculares; & M E, N S, C B parallelas eſſe; *punctum* M liberè ſumi; *arcum* M N indefinitè parvum eſſe; rectam αC curvæ V B, $\alpha\mu$ curvæ A M, $\mu\nu$ *arcui* M N æquales eſſe; ad rectam αC applicatas ei perpendiculares eſſe. His præſtratis, *Præparatio Communis.*

I. Sit M P curvæ A B perpendicularis; & lineæ K Z L, $\alpha\varphi\delta$ tales, ut F Z ipſi M P, & $\mu\varphi$ ipſi M F æquentur; erit *ſpatium* $\alpha L\delta$ ipſi A D L K æquale. Fig. 156, 157.

Nam *Triangula* M R N, P F M ſimilia ſunt, adeoque M N . N R :: P M . M F . unde M N × M F = N R × P M, hoc eſt (ſubſtitutis æqualibus) $\mu\nu \times \mu\varphi = FG \times FZ$; ſeu rectang. $\mu\theta$ = rectang. FH; ſpatium verò $\alpha C\delta$ minimè differt ab indefinitè multis rectangulis, qualia $\mu\delta$; & ſpatium A D L K totidem rectangulis, qualia F H, æquivalet. unde liquet Propoſitum.

II. Hinc, ſi curva A M B circa axem A D rotetur, habebit ſe *producta ſuperficies* ad *ſpatium* A D L K, ut *Circumferentia circuli ad radium*; unde noto ſpatio A D L K cognoſcetur dicta *ſuperficies*. Conſequentiæ rationem jam anteà pridem aſſignavimus. Fig. 156.

III. Exhinc *Sphæræ*, *Sphæroidis* utriuſque, *Conoidúmque ſuperficies dimenſionem* accipiunt; nam ſi A D ſit conicæ ſectionis, à qua iſtæ figuræ oriuntur, axis; linea K Z L ſemper aliqua conicarum exiſtet, haud difficili negotio determinabilis. Hoc ſuggero tantùm, quoniam nunc evulgatum habetur.

IV. Iisdem ſtantibus, ſit curva A Y I talis, ut ordinata F Y ſit inter congruas F M, F Z proportione media; erit *ſolidum* ex ſpatio α δ C circa axem α C rotato factum æquale *ſolido*, quod à *ſpatio* A D I circa axem A D converſo procreatur. Fig. 156, 157.

Nam eſt M N . N R :: P M . M F :: P M × M F . M F q :: F Z × F M . M F q . unde M N × M F q = N R × F Z × F M; hoc eſt μ ν × μ φ q = N R × F Y q. Unde liquet Propoſitum.

V. Simili ratione colligetur, ſi F Y ponatur inter F M, F Z *bimedia*, fore *ſummam cuborum* ex applicatis (quales μ φ) à curva α φ δ ad rectam α C, æqualem *ſummæ cuborum* ex explicatis à curva A Y I ad rectam A D. Fig. 156, 157. parique modo ſe res habebit quoad cæteras *poteſtates*.

VI. Porrò, ſtantibus reliquis, ſit curva V X O talis, ut E X ipſi M P æquetur; & curva ϖ ξ ↓ talis, ut μ ξ æquetur ipſi P F; erit ſpatium α ϖ ↓ C æquale ſpatio D V O B. Fig. 156.

Nam eſt M N . M R :: M P . P F; adeoque M N × P F = M R × M P . hoc eſt μ ν × μ ξ = E S × E X . vel rectang. E T = rectang. μ σ. Unde liquet Propoſitum.

VII. Subnotetur hoc: Si curva A B ſit *Parabola*, cujus *Axis* A D, *parameter* R; erit curva V X O *hyperbola*, cujus *centrum* D, *Axis* D V, cujuſque *parameter* axi R æquatur (ſcilicet ob E X q = (P M q = P F q + F M q = $\frac{R q}{4}$ + F M q = $\frac{R q}{4}$ + D E q =) D V q + D E q). item *ſpatium* α C ↓ ϖ erit *Rectangulum*; quoniam ſingulæ applicatæ μ ξ ipſi $\frac{R}{2}$ æquantur. Conſtat itaque dato *ſpatio hyperbolico* D V O B curvam A M B dari; & viciſſim. Hoc obiter. Fig. 156.

VIII. Adnotari poſſet etiam omnia ſimul quadrata ex applicatis ad rectam α C à curva ϖ ξ ↓ æquari rectangulis omnibus ex P F, E X ad rectam D B applicatis (ſeu computatis); cubos ex μ ξ æquari ipſis P F q × E X; ac ità porrò. Fig. 157.

IX. Adjungatur etiam (productâ P M Q) ſi ponatur F Z æqualis ipſi P Q, & μ φ ipſi A Q; *ſpatium* α C δ *ſpatio* A D L K æquari. Fig. 157.

Nam

Nam ob MN. NR :: PM. MF :: PQ. QA; erit MN × QA = NR × QA; hoc est rectang. $\mu\theta$ = rectang. FH.

X. Porrò, curvam AB tangat recta MT, sintque curvæ DXO, $\alpha\varphi\delta$ tales, ut EX æquetur ipsi MT, & $\mu\varphi$ ipsi MF; erit spatium $\alpha\zeta\delta$ æquale *spatio* DXOB. Fig. 158. 159.

Nam MN. MR :: MT. MF. quare MN × MF = MR × MT; hoc est $\mu\nu \times \mu\varphi$ = ES × EX; unde patet.

XI. Hinc rursus, *superficies solidi ex spatii* AB D circa axem AD conversione progeniti ad *spatium* DXOB se habet, ut *Circuli Circumf. ad radium*; hoc igitur noto simul illa innotescet. unde rursus *Sphæroidum, Conoidumque superficies* dimetiri licebit. Fig. 158.

XII. Si linea DYI talis fuerit, ut sit EY = $\sqrt{EX}$ × MF; erit *solidum* ex *spatio* $\alpha\zeta\delta$ circa axem $\alpha\zeta$ rotato factum æquale *solido, quod ex spatio* DBI circa axem DB rotato progignitur.

Etenim est MN. MR :: MT × MF. MFq :: EX × MF. MFq :: EYq. MFq. quare MN × MFq = MR × EYq. hoc est $\mu\nu$ × $\mu\varphi$q = ES × EYq. Fig. 158. 159.

XIII. Simili ratione *Cuborum* (*aliarumque potestatum*) ex ordinatis $\mu\varphi$ *summas* cum *spatiis* ad rectam DB computatis licebit conferre.

XIV. Sint præterea lineæ AZK, $\alpha\xi\downarrow$ tales, ut FZ ipsi MT, & $\mu\xi$ ipsi TF æquentur; *spatium* $\alpha\zeta\downarrow$ æquabitur *spatio* ADK.

Etenim MN. NR :: MT. TF; hoc est $\mu\nu$. FG :: FZ. $\mu\xi$. quare $\mu\nu \times \mu\xi$ = FG × FZ. Fig. 158. 159.

XV. Etiam *summa quadratorum* ex applicatis $\mu\xi$ æquatur *summæ Rectangulorum* ex TF, FZ; & *summa Cuborum* ex $\mu\xi$ æquantur ipsis TFq × FZ (ad rectam scilicet AD computationem exigendo) parique quoad cæteras potestates modo. Fig. 158, 159.

XVI. Rursus ponatur recta QMP curvæ AMB perpendicularis; sitque recta $\zeta\delta$ æqualis ipsi BD, & compleatur *Rectangulum* $\alpha\zeta\delta\zeta$; tum curva KZL talis sit, ut FZ ipsi QP æquetur; erit *rectang.* $\alpha\zeta\delta\zeta$ æquale *spatio* ADLK. Fig. 160, 161.

Nam est MN. NR :: (PM. MF ::) PQ. IF. quare MN × IF = NR × PQ; hoc est $\mu\nu \times \mu\xi$ = FG × FZ. unde patet.

Hinc noto ſpatio AKLD cognoſcetur curvæ AMB quantitas.

Fig. 160, 161. XVII. Item, poſito rectam TMY contingere curvam AMB, factâque $C\gamma = BC$, completóque *Rectangulo* $\alpha C \gamma \downarrow$, ſit curva OXX talis, ut FX ipſi TY æquetur; erit *ſpatium* (infinitè protenſum) ADOXX æquale *Rectangulo* $\alpha C \gamma \downarrow$.

Nam MN. NR :: YT. DA; hoc eſt $\mu\nu$. FG :: FX. $\mu\theta$. & $\mu\nu \times \mu\theta = FG \times FX$. quare liquet.

Hinc rurſus, explorato *ſpatio* ADOXX curva AMB innoteſcet.

Fig. 160, 161. XVIII. Quin adſumptâ quâpiam determinatâ R, & factâ rectâ $C\delta = R$; ſi curva OXX talis ſit, ut MF. MP :: R. FX; erit *rectangulum* $\alpha C \delta \zeta$ æquale *ſpatio* ADOXX. ac inde comperto hoc ſpatio, curva prorſus innoteſcet.

Nam MN. NR :: MP. MF :: FX. R. adeóque $MR \times R = NR \times FX$; ceu $\mu\nu \times \mu\xi = FG \times FX$.

Complura talia poſſent adponi; ſed vereor ut hæc nimis quam ſufficere videantur.

XIX. Adnotetur ſaltem, hæc omnia æquè vera fore, nec abſimiliter oſtendi, poſito curvæ AMB convexa rectam AD ſpectare.

XX. Ex oſtenſis autem *methodus* facilis emergit *curvas* (διαγραμματικὰς) *deſignandi*, quæ *dimenſionem* admittunt qualem qualem; nimirum ità procedas.

Fig. 162. Quamlibet (tibi quadantenùs notam) *aream trapeziam rectangulam*, duabus parallelis rectis AK, DL; rectâ AD; & lineâ quâcunque KL *comprehenſam* accipe sis. ad iſtam verò ſic referatur altera ADEC, ut ductâ quâcunque rectâ FH ad DL parallelâ (quæ ſecet lineas AD, CE, KL punctis F, G, H) adſumptâque rectâ determinatâ Z; ſit *quadratum* ex FH æquale *quadratis* ex FG, & Z.

Fig. 163. quinetiam ſit curva AIB talis, ut ad ipſam productâ rectâ GFI, ſit *rectangulum* ex Z, & FI æquale *ſpatio* AFGC; erit *rectangulum* ex Z, & *curva* AB æquale *ſpatio* ADLK.

Æquè procedit methodus, etiamſi recta AK ponatur infinita.

Fig. 162. *Exemp.* 1. Sit KL *recta linea*; erit curva CGE *Hyperbola*.

Fig. 163. 2. Sit linea KL *Arcus Circuli*, cujus *Centrum* D; & AK = Z

$= Z$; erit curva AGF *Circulus*; & curva AB $= \frac{AD}{2} + \frac{DE}{2AK}$ arc. KL.

3. Sit linea KL *Hyperbola æquilatera*, cujus *Centrum* A, & *Axis* AK $= Z$; erit CGE recta linea; & curva AB *Parabola*. Fig. 164.

4. Sit Linea KL *Parabola* (cujus axis AD) erit curva CGE quoque *Parabola*; & curva AB *Paraboliformium* quædam. Fig. 163.

5. Sit curva KL *Paraboliformis* quædam inversa, vel infinita (talis scilicet ut sit $FH = \sqrt{\frac{Z^2}{AF}}$) erit curva AB *Cycloïs*, ad *circulum* pertinens, cujus *Diameter* ipsi Z æquatur. Fig. 165.

Elegantiora forsan *Exempla* ipse circumspectans excogitabis.

APPENDI-

APPENDICULA I.

HIc demùm etsi præter institutum sit particularia nunc attingere; qualibus sanè, hæc generalia consequentibus, admodum proclive foret turgidum Volumen compingere (*amico tamen morem gerens operâ* dignum censenti) subtexam ad *Circuli Tangentes Secantesq;* spectantia nonnulla, pleraque de suprà positis emergentia.

Præparatio Communis.

Fig. 166. Esto *cirtuli Quadrans* A C B, quam tangant rectæ A H, B G; & in productis H A, A C sumantur A K, C E singulæ pares *radio* C A; & *asymptotis* A C, C Z per K descripta sit *Hyperbola* K Z Z; *asymptotis* B C, B G per E *hyperbola* L E O. Sumatur etiam in arcu A B Fig. 167. *punctum arbitrarium* M, per quod ducantur recta C M S (tangenti A H occurrens in S) recta M T circulum tangens; recta M F Z ad B C parallela, recta M P L ad A C parallela. Sit denuò recta αC æqualis *arcui* A B, & $\alpha\mu$ arcui A M; & rectæ $\alpha\gamma$, $\xi\mu$ $\varpi\psi$ rectæ αC perpendiculares; quarum $\alpha\gamma = AC$; $\mu\xi = AS$; $\mu\psi = CS$; $\mu\varpi = MP$.

I. Recta C S æquatur rectæ F Z; adeoque *summa secantium ad arcum* A M pertinentium, & ad rectam A C applicatarum æquatur *spatio hyperbolico* A F Z K.

Est enim C F. C A :: (C M. C S ::) C A. C S. adeòque C F × C S = C Aq. item C F × F Z = C A × A K = C A q. ergo C S = F Z.

II. *Spatium* $\alpha\mu\xi$ (hoc est *Summa tangentium in arcu* A M ad rectam $\alpha\mu$ applicatarum) æquatur *spatio hyperbolico* A F Z K. Fig. 167.

Patet ex hujusce Lectionis 9. III.

III. Curva A X X talis ſit, ut P X ſecanti C S (vel C T) æquetur; *ſpatium* A C P X hoc eſt *Summa ſecantium ad arcum* A M pertinentium, & ad C B applicatarum) æquatur *duplo ſectori* A C M.

Nam (*a*) *ſpatium* A F M X *Segmenti* A F M *duplum* eſt; & *rectangulum* F C P M *Trianguli* F C M. ergò *totum ſpatium* A C P X totius *ſectoris* A C M duplum eſt. Fig. 166. (*a*) 10. Lect. XI.

Etiam hoc è 16. hujus duodecimæ Lectionis apertè conſtat.

IV. Curva C V V talis ſit, ut P V *Tangenti* A S æquetur; erit *ſpatium* C V P (hoc eſt *ſumma tangentium ad arcum* A M *pertinentium*, & ad rectam C B applicatarum) æquale *ſemiſſi quadrati ex ſubtenſa* A M. Fig. 166.

Manifeſtè conſectatur ex ſeptima undecimæ Lectionis.

V. Acceptâ C Q = C P; & ductâ Q O ad C E parallelâ (quæ *hyperbolæ* L E occurrat in O) erit *ſpatium hyperbolicum* P L O Q ductum in *radium* C B (ſeu *cylindricum* ad baſin P L O Q, altitudine B C (duplum *ſummæ quadratorum* ex rectis C S, ſeu P X ad *arcum* A M pertinentibus, & ad rectam C B applicatis. Fig. 166.

Nam quia P L. Q O :: (B Q. B P. hoc eſt ::) B C + C P. B C — C P; erit componendo P L + Q O. Q O :: 2 B C. B C — C P. item eſt Q O. B C :: B C. B C + C P; ergò (pares rationes adjungendo) eſt P L + Q O. Q O + Q O. B C = 2 B C. B C — C P + B C. B C + C P; hoc eſt P L + Q O. B C :: 2 B C q. B C q — C P Q (hoc eſt ::) 2 B C q. P M q. verùm eſt P X q. B C q :: B C q. P M q. vel (antecedentes duplando) 2 P X q. B C q :: 2 B C q. P M q. ergò P L + Q O. B C :: 2 P X q. B C q. vel P L × B C + Q O × B C. B C q :: 2 P X q. B C q. quare P L × B C + Q O × B C = 2 P X q. itaque B C in omnes P L + Q O ducta adæquat omnia totidem P X q, unde conſtat Propoſitum.

VI. Hinc ſpatium $\alpha\gamma\downarrow\mu$ (hoc eſt *ſumma ſecantium in arcu* A M ad $\alpha\zeta$ applicatarum) æquatur *ſubduplo ſpatio hyperbolico* P L O Q. Fig. 167.

Nam ſumatur arcus M N indefinitè parvus, & huic æqualis recta $\mu\nu$, ducatúrque recta N R ad A C parallela. Eſtque M N. M R :: (M C. C F :: C S. C A :: P X. C A ::) P X q. P X × C A. adeóque M N × P X × C A = M R × P X q. ſeu $\mu\nu \times \mu\downarrow \times$ C A = M R × P X q. atqui (ex præcedente) omnium M R × P X q ſumma ſpatii P L O Q in C A ducti ſubdupla eſt. Ergò omnia totidem $\mu\nu \times \mu\downarrow$ in C A ducta eidem ſubduplo æquantur. quare ſpatium $\alpha\gamma\downarrow\mu$ (omnibus

ribus $\mu\nu \times \mu\downarrow$ par) æquatur ſubduplo ſpatii PLOQ.

Fig. 167. VII. Omnia quadrata ex rectis $\mu\downarrow$ (ad rectam $\alpha\mu$ applicais) æquant CA × CP × PX (hoc eſt *parallelipipedum Baſe Rectangulo* ACPD, *Altitudine* CS).

Hujus *Effati demonſtrationem* (quanquam $\pi\epsilon\acute{\iota}\chi\eta\varsigma$) tranſilio; quoniam aliud *Schema* diſcurſúmque præ reliquis pleriſque longiuſculum expoſcit; neque rem tanti video.

Fig. 166. VIII. Curva AYY talis ſit, ut FY æquetur ipſi AS; ductâ tum rectâ YI ad AC parallela, erit etiam *ſpatium* ACIYYA (hoc eſt *ſumma Tangentium* ad *arcum* AM pertinentium, & ad rectam AC applicatarum, unà cum *rectangulo* FCIY) æquale *ſubduplo ſpatio hyperbolico* PLOQ.

(a) 1. Lect. XII. Nam *ſpatium* $\alpha\gamma\varpi\mu$ (a) æquatur *rectangulo* ACPD; hoc eſt *rectangulo* FCIY (nam eſt CA. AS :: CF. FM; vel CA. FY :: CF. CP. adeoq; CA × CP = FY × CF). item ſpatium $\gamma\varpi\downarrow$ (hoc eſt omnes rectæ TF ad $\alpha\zeta$ applicatæ, quotquot ad arcum AM pertinent) (b) æquatur *ſpatio* AFY; ergo *ſpatium* ACIYA æquatur *ſpatio* $\alpha\gamma\downarrow\mu$; hoc eſt (ut mox oſtenſum) *ſemiſſi ſpatii hyperbolici* PLOQ.

(b) 14. Lect. XII.

Aliter illud, (eíque connexa) dimenſus ſum, *hoc præmiſſo Lemmate.*

Fig. 168. IX. Sit *Hyperbola æquilatera* (axes nempe pares habens) ERK ad cujus axes CED, CI; & ad hos ordinatæ KI, KD; ſit item curvâ EVY talis, ut in *hyperbola* liberè ſumpto puncto R, ductâque recta RVS ad DC parallelâ, ſint SR, CE, SV continuè proportionales; connexâ rectâ CK, erit *Spatium* CEYI *Sectoris hyperbolici* KCE duplum.

Nam ducatur RT *hyperbolam* tangens, & RH ad CI parallela. Eſtque CH. CE :: CE. CT. quare CT = SV; vel HT = RV. itaque *Spatium* EDKY duplum eſt *ſegmenti* EDK. item *rectangulum* IKDC *trianguli* CDK duplum eſt; ergo *reliquum ſpatium* CEYI *reliqui ſectoris* ECK duplum eſt.

10. Lect. XI.

Fig. 169. X. Reſumptâ jam quadrante circulari ACB, ſit CE = CA; & axe AE, *parametro* etiam AE, deſcripta ſit *Hyperbola* EKK; poſitóque curvam AYY talem eſſe, ut ordinatâ quâcunque rectâ MFY, ſit FY tangenti AS æqualis; ducatur recta YIK (rectam CZ,

C 2 secans in I, *hyperbolam* in K) & connectatur C K ; erit spatium A C I Y A *sectoris hyperbolici* E C K duplum.

Nam est C Iq. C Aq :: A Sq. C Aq :: F Mq. C Fq :: C Aq — C Fq. C Fq. componendoque, C Iq + C Aq . C Aq :: C Aq. C Fq. hoc est (ex *hyperbolæ* natura) I Kq. C Aq :: C Aq. C Fq. vel I K. C E :: C E. I Y. itaque *spatium* A C I Y A *sectoris* E C K duplum esse perspicuum est è præcedente. Fig. 169.

XI. *Coroll.* Hinc si *Polo* E, *Chordâ* C B, *Sagittâ* C A descripta sit *Conchois* A V V, cui occurrat Y F M producta in V ; erit M V = F Y ; adeóque *spatium* A M V *spatio* A F Y æquatur.

XII. Unde *spatiorum* ejusmodi *Conchoidalium dimensiones* innotescunt.

XIII. Nescio, an *operæ* sit hoc adjicere *Corollarium.*

XIII. Sit recta A E rectæ R S perpendicularis ; & C E = C A ; sintque duæ (sibimet inversæ) *Conchoides* A Z Z, E Y Y ad eundem *polum* E, *communémque regulam* R S descriptæ, ab E verò ducatur utcunque recta E Y Z (lineas intersecans, ut vides) sit etiam *hyperbole æquilatera*, E K K, cujus *centrum* C, *semiaxis* C E ; duc&âque I K ad A E parallelâ, connectatur C K, erit *spatium quadrilineum* A E O Y Z P A (rectis A E, Y Z, & *conchis* E O Y, A P Z comprehensum) æquale *quadruplo sectori Hyperbolico* E C K. Fig. 170.

Nam si *centro* E per C ducatur *arcus circularis* C X ; è dictis facilè colligetur *spatium* A P Z I C æquari *duplo sectori Hyperbolico* E C K unà cum *sectore circulari* C E X. item *spatium* E O Y I C æquari *duplo sectori* E C K, *dempto sectore* C E X.

Ità quoque facile colligas. Ducantur Z F, Y G ad C S parallelæ ; & protrahantur G Y L, L I H. ac ob I Y = I Z, est F Z + G Y = 2 C I. & *trapezium* F G Y Z = *rectang.* E G L H = 2 C G × C I. ergò patet.

Adnotari potest, si lubet, ductâ A T ad C S parallelâ, protractâque E Z T, si ponatur N = 2 triang. C E I — 2 sect. E C K ; fore spat. E Z T + E O Y E = 2 N.

Nempe N + C X I = spat. A Z T. & N — C X I = spat. E O Y E.

XIV. Adjiciemus etiam hisce cognatam *Cissoidalis spatii* dimensionem.

Sit *Semicirculus* A M B (cujus centrum C) quem tangat recta A H ; eique congruens *Cissois* A Z Z cujus scilicet hæc proprietas est, Fig. 171.

Fig. 171. ut in *circumf.* A M B ſumpto utcunque puncto M, & per hoc trajectâ rectâ B M Z, ductâque rectâ M F Z, quæ curvam A Z Z ſecet in Z, ſit M Z = A S) in rectâ verò $\alpha\zeta$ ſumatur $\alpha\mu$ æqualis arcui A M, & ad $\alpha\mu$ applicentur rectæ perpendiculares $\mu\xi$ æquales *arcuum* A M *ſinubus verſis* A F; erit *ſpatium trilineum* M A Z *ſpatii* $\alpha\mu\xi$ *duplum.*

Nam ſumatur *arcus* M N indefinitè parvus, & ei æqualis $\mu\nu$; ducatúrque recta N R ad A B parallela, connectatúrque recta C M. Eſtque jam A S. A B (2 C M) :: (F M. F B ::) A F. F M. & 2 C M. 2 M N :: C M. M N ::) F M. N R. quapropter erit ex æquo A S. 2 M N :: A F. N R; & ideò N R × A S = 2 M N × A F. hoc eſt N R × M Z = 2 $\mu\nu \times \mu\xi$. unde *ſpatium* M A Z *duplo ſpatio* $\alpha\mu\xi$ æquatur.

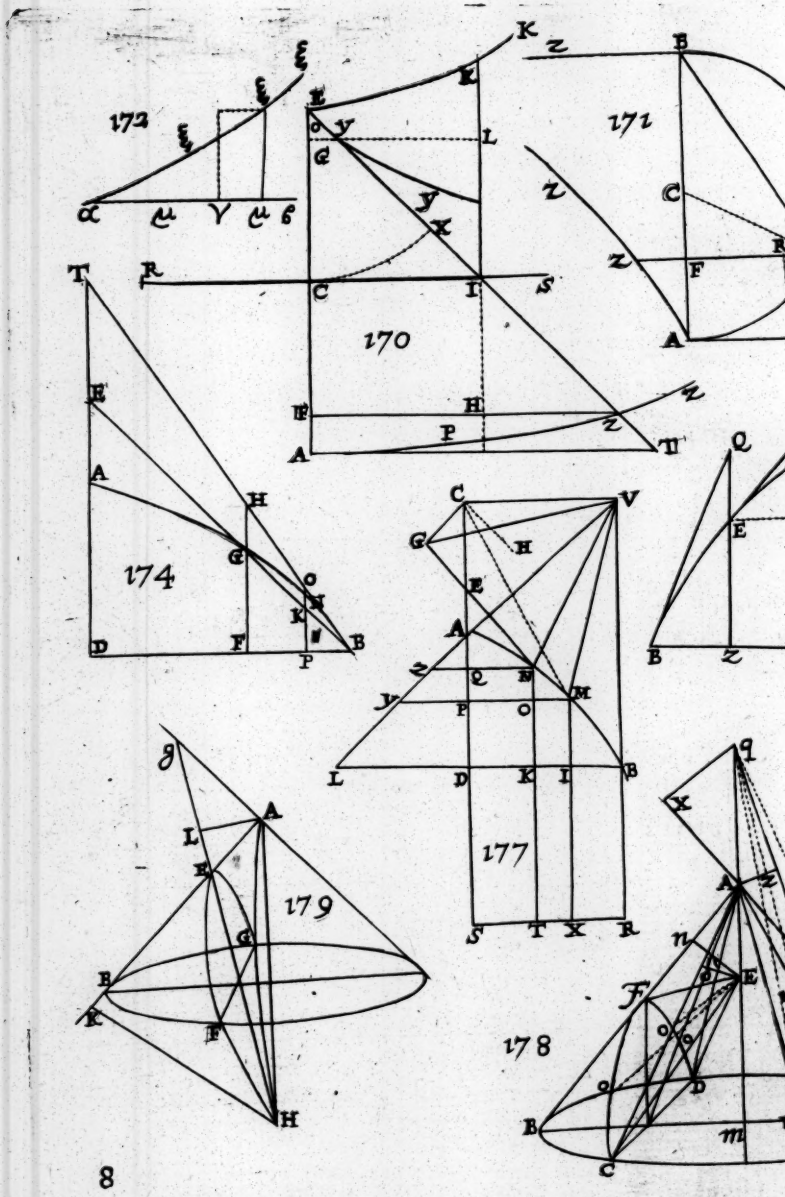
Hinc cum *ſpatii* $\alpha\mu\xi$ dimenſio vulgò nota ſit, & è ſuprà poſitis
Fig. 172. etiam facilè deducatur; habetur *ſpatii ciſſoidalis* M A Z *dimenſio.* calculum ineat qui volet.

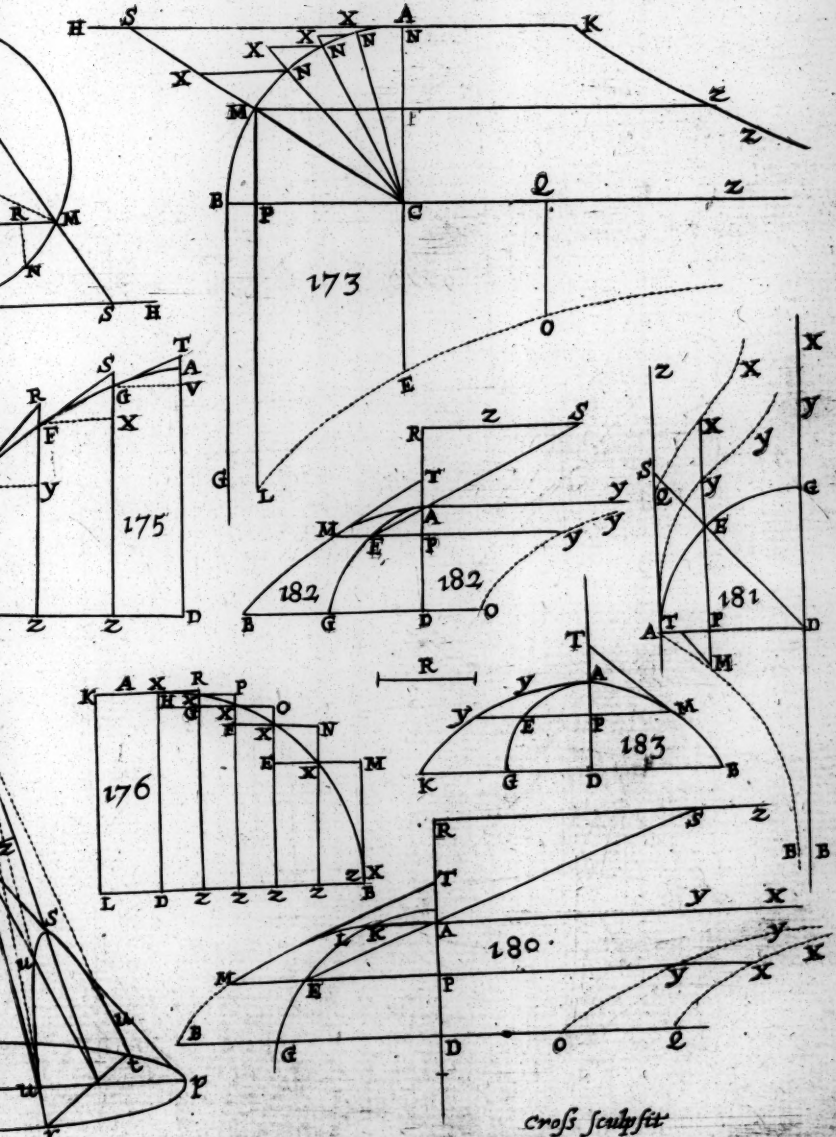
Iſta claudet hoc *Conſectariolum*:

XV. Sit *circuli quadrans* A C B, *circulúmque* tangant A H, B G;
Fig. 173. ſintque curvæ K Z Z, L E O *hyperbolæ*, eædem quæ (*a*) ſuperiùs. ar-
(*a*) 7, & 12. cus verò ſumptus A M in partes diviſus concipiatur indefinitè multas punctis N; per quæ trajiciantur radii C N; & his occurrant rectæ N X ad puncta X; *ſumma rectarum* N X (in radiis) æquatur ſpatio $\frac{\text{A F Z K}}{\text{Rad.}}$; & *ſumma rectarum* N X (in parallelis ad A S) æquatur *ſpatio* $\frac{\text{P L Q O}}{\text{3 Rad.}}$.

Nam triangulum X M N triangulo S A C ſimile eſt; & inde X M. M N :: A S. C A. & X N. M N :: C S. C A. unde X M = $\frac{\text{M N} \times \text{A S}}{\text{C A}}$; & X N = $\frac{\text{M N} \times \text{C S}}{\text{C A}}$. & ità in reliquis; unde liquet Poſitum, ex 2, & 7 harum.

APPEN-


172
170
171
174
177
179
178


173
175
182
182
181
183
176
180.
Cross sculpsit

APPENDICULA 2.

BRevitati ſimul ac perſpicuitati (huic autem præcipuè) conſulentes præcedentia recto diſcurſu comprobata dedimus; quali non modò veritas, opinor, ſatis firmatur, at ejuſdem origo limpidiùs appareret. Verùm nè quis, minùs hujuſmodi ratiociniis adſuetus, hæreat, iſta paucula ſubdemus, quibus tales diſcurſus communiantur, quorumque ſubſidio non difficilè conficiantur *Propoſitorum demonſtrationes apagogicæ.*

I. Sint quotlibet *rationes* A ad X, B ad Y, C ad Z, ſingulæ deſignatâ quâpiam ratione R ad S majores; erit *omnium antecedentium* (ſimul acceptarum) ad *omnes conſequentes ratio* major ratione R ad S.

A . X .	A . M .
B . Y .	B . N .
C . Z .	C . O .

Nam ſint rationes A ad M, B ad N, C ad O ſingulæ æquales rationi R ad S. ergò X ⊐ M; & Y ⊐ N; ac Z ⊐ O. patet igitur fore A + B + C. X + Y + Z ⊏ A + B + C. M + N + O. hoc eſt A + B + C. X + Y + Z ⊏ R. S.

II. Hinc patet, ſi quotlibet rationes ſingulæ deſignabili quâcunque majores ſint, *antecedentium ſummam ad ſummam conſequentium* etiam deſignabili quâcunque majorem rationem habere.

III. Sit curva quævis A D B, cujus axis A D, & ad hunc applica- Fig. 174.

ta recta B D; curvam verò tangat recta B T; sitque B P rectæ B D
Fig. 174. particula indefinitè parva; ducatúrque recta P O ad D T parallela, curvam secans ad N; dico P N ad N O rationem habere majorem quâvis designabili, puta quàm R ad S.

Nam sit D E. E T :: R S; connexaque recta B E curvam secet in G, rectam P O in K; per G verò ducatur F H ad D A parallela. quoniam igitur B P ponitur indefinitè parva, est B P ⊐ B F; adeóq; P K ⊐ P N (nam subtensa B G intra curvam tota cadit). ergò P N. N O ⊏ P K. K O :: D E. E T :: R. S.

IV. Hinc, si basis D B in partes secetur indefinitè multas ad puncta Z; & per hæc ducantur rectæ ad D A parallelæ curvam secantes punctis E, F, G; per hæc verò ducantur *Tangentes* B Q, E R, F S, G T parallelis Z E, Z F, Z G, D A occurrentes punctis Q, R, S, T; habebit recta A D ad omnes interceptas E Q, F R, G S, A T (simul sumptas) rationem quàvis assignabili majorem.

Fig. 175. Nam ducantur rectæ E Y, F X, G V ad B D parallelæ. Habent igitur rectæ Z E, Y F, X G, V A ad rectas E Q, F R, G S, A T (singulæ ad singulas sibi in directum positas respectivè) rationem designabili quâcunque majorem. ergò simul omnes istæ ad has simul omnes *rationem* habent designabili quâvis *majorem*; hoc est recta AD ad E Q + F R + G S + A T ejusmodi rationem habet.

V. Hinc inter computandum, omnes E Q, F R, G S, A T simul acceptæ nihilo æquivalent; seu rectæ Z E, Z Q; & Z F, Y R, &c. æquantur; item tangentium particulæ B Q, E R, &c. respectivis *curvæ* portiunculis B E, E F, &c. pares, & quasi coincidentes haberi possunt. quin & adsumere tutò licet, quæ evidentèr his cohærent.

Fig. 176. VI. Sit porrò *curva* quævis A B, cujus *Axis* A D, & ad hunc applicata D B; æquisecetur autem D B in partes indefinitè multas ad puncta Z, per quæ ducantur rectæ ad A D parallelæ, curvam A B intersecantes punctis X; quibus occurrant per ipsa X ductæ ad B D parallelæ rectæ M E, N F, O G, P H; sit autem segmento A D B (rectis A D, D B, & curvâ A B comprehenso) *circumscripta figura* A D B M X N X O X P X R A major *spatio* quodam S; dico *segmentum* A D B non esse minus quàm S.

Nam si fieri potest sit A D B minus quàm S excessu *rectangulum* A D L K adæquante. & quoniam A R est indefinitè parva, adeóque minor quàm A K, liquet rectangulum A D Z R minus esse *rectangulo* A D L K.

ADLK. item patet *ſegmentum* ADB unà cum *rectangulo* ADZR majus eſſe *figurâ circumſcriptâ* (etenim *rectangulum* ADZR *rectangulis* RH, PG, OF, NE, MZ æquatur, proindéque majus eſt *trilineis* AXR, XXP, XXO, XXN, XBM). ergò *ſegmentum* ADB unà cum *rectangulo* ADLK multo majus eſt *figurâ circumſcriptâ*; hoc eſt, *ſpatium* S majus eſt *figurâ circumſcriptâ*, contra *Hypotheſin*. Fig. 176.

VII. Item, ſi ponatur *figura inſcripta* HXGXFXEXZDH minor *ſpatio quodam* S; dico *ſegmentum* ADB non eſſe majus quàm S.

Nam ſi majus eſſe velis, eſto rurſum *exceſſus* par *rectangulo* ADLK; quod utique (ſicut priùs) majus erit *rectangulo* ADZR. Eſt autem *ſegmentum* ADB, dempto *rectangulo* ADZR, minus figurâ inſcriptâ. ergò ſegmentum ADB, dempto rectangulo ADLK, multo minus fit inſcriptâ figurâ; hoc eſt *ſpatium* S minus eſt inſcriptâ figurâ, contra *Hypotheſin*.

VIII. Hinc, ſi *ſpatium* quodcunque fuerit, (puta S) cui circumſcripta figura æquetur *figuræ* ADBMNOPRA; nec non cui *inſcripta figura æquetur figuræ* HGFEZDH; palàm eſt *ſpatium* iſtud S *ſegmento* ADB exæquari.

Nam (uti mox oſtenſum) hoc illo majus eſſe nequit, aut minus.

Poterunt autem hæc ad *alios circumſcriptionis* ac *inſcriptionis modos* accomodari. ſuffecerit innuiſſe.

Conicorum Superficies dimetiendi Methodus.

SIt *curva* quæpiam AMB, cujus *Axis* AD, & in hoc ſignatum punctum C; ad ipſum verò ordinata recta BD. à puncto quopiam M in curva ſumpto ducatur recta ME curvam tangens, & à C demittatur CG ad ME perpendicularis; ſit item determinata recta CV ad planam DAB rectа, & connectatur VG (erit VG ipſi MG perpendicularis; nam ſi ducatur CH ad GM parallela, liquet CH plano GVG rectam eſſe, adeoque GM eidem recta erit) Porrò ſit linea RS talis, ut ductâ rectâ MIX ad AD parallelâ (quæ ſecet ordinatam. Fig. 177.

dinatam BD in I, & lineam RS in X) ſit MP. ME :: VG. IX; vel, ſit linea AL talis, ut ductâ MPY ad BD parallelâ (quæ ſecet axem AD in P, & lineam AL in Y) ſit PE. ME :: VG. PY; erit tunc utrumque *ſpatium* (ſingillatim) BRSD, vel ADL duplum *ſuperficiei conicæ*, quod ex recta per V & curvam AMB mota progeneratur. Fig. 177.

Nam ſumatur MN indefinita curvæ particula; & per N ducantur rectæ NOKT ad ipſam AD, & NQZ ad BD parallelæ (quæ lineas expoſitas, ut *Schema* monſtrat, ſecent) connectantúrque rectæ VM, VN. eſtque MO. MN :: MP. ME :: VG. IX. quare MN × VG = MO × IX = IK × IX. Item eſt NO. MN :: PE. ME :: VG. PY. unde MN × VG = NO × PY = QP × PY. Eſt autem MN × VG duplum trianguli MVN. quapropter tam IK × IX, quàm QP × PY duplum eſt *trianguli* MVN. pariter autem ubique ſit. ergò conſtat Propoſitum.

Exemplum.

Fig. 177. Sit curva AMB *hyperbola æquilatera*, cujus *Centrum* C, ſitque CV = CA = *r*. & CP = *x* (nam hujuſmodi *calculo* plerunque rem expedit peragere) tum connexâ MC; patet eſſe $EC = \frac{rr}{x}$; & $MCq = 2xx - rr$ (nam $PMq = xx - rr$) item eſt MCq. CPq :: MEq. MPq; hoc eſt MCq. CPq :: ECq. CGq. hoc eſt $2xx - rr. xx :: \frac{r^4}{xx}. CGq = \frac{r^4}{2xx-rr}$. quare $VGq = \frac{r^4}{2xx-rr} + rr = \frac{2rrxx}{2xx-rr} = \frac{VAq \times CPq}{MCq}$. vel $VG = \frac{VA \times CP}{MC}$. quare VG. VA :: (CP. MC) :: MP. ME. hinc conſectatur in hoc caſu, quum ubique ſit IX = VA, *lineam* RS fore *rectam*; & *rectangulum* BRSD *ſuperficiei conicæ* AMBV *duplum eſſe*.

Cæterùm hoc *elegans exemplum* ſuppeditavit Generoſus, ingenio ac eruditione præſtans, Vir (*Collegii noſtri, quod olim Sociorum Commenſalis incoluit*, ornamentum) *D. Franciſcus Jeſſopius*, Armiger; cujus in hanc rem perquam ingenioſo mihi comiter impertito ſcripto (ipſius injuſſu quidem, at ſpero non ingratiis) ſeu *Gemmâ* quâdam audebo mea condecorare.

Prop.

Prop. 1.

Si à puncto E in *axe* A *m coni recti* A B C *p* recta infinita E C tranſeat per *coni ſuperficiem*, & quieſcente termino E circumferatur recta E C donec redeat ad locum à quo cœpit moveri, ita ut ſemper aliqua pars ejus ſecet *coni ſuperficiem* (puta per *Hyperbolam* C F D & rectas D A A C in ſuperficie coni ſitas) *ſolidum comprehenſum à ſuperficie vel ſuperficiebus genitis à linea* E C ſic mota & à *portione ſuperficiei* ejuſdem coni terminatæ à linea vel lineis C F D, D A, A C quas recta E C circumlata deſcribit in *ſuperficie conica*, erit æquale *Pyramidi* cujus *Altitudo* eſt æqualis *perpendiculari* E *n* à puncto E ad latus *Coni* deductæ *baſis* verò æqualis eidem *ſuperficiei conicæ terminatæ* à linea vel lineis C F D, D A, A C generatis à motu lineæ E C. Fig. 178.

Solidum enim E C F, D A C conſtat ex *infinitis pyramidibus* E C *o* A E *o o* A, &c. æqualtis perpendiculari E *n*, quarum baſes omnes ſimul ſumptæ, exhauriunt *ſuperficiem conicam* C F D, D A, A C.

Prop. 2.

Datus ſit *Conus rectus* A B C *p* ſecetur à plano C F D axi A *m* parallelo ducantur rectæ A C, A D à vertice *coni* ad *lineam hyperbolicam* C F D, & ſuper *triangulo* A C D erigatur *pyramis* E A C D habens *verticem* E in *axe coni*; ſitque E ♌ plano A C D perpendicularis, & E *n* lateri coni. Fig. 178.

Dico, *ſuperficies conica* terminata à *linea hyperbolica* C F D & rectis D A, A C ita ſe habet ad A C D *baſem pyramidis* E A C D ut *altitudo* E ♌ *pyramidis* E A C D ad perpendiculum E *n*. Quoniam enim Conici A C F D, E C F D habent vertices A & E in plano baſi C F D (quæ eſt utrique Conico communis) parallelo ergo ſunt æquales. Si ergò à ſolido quod componitur à conico A C F D addito pyramide E C A D auferatur conicus E C F D reliquum erit ſolidum E C F D A C quale in propoſitione prima deſcribitur motu rectæ E C æquale pyramidi E A C D. Quoniam verò *æqualium pyramidum* reciprocæ ſunt *baſes altitudinibus*, ut *altitudo* E ♌ *pyramidis* E A C D ad perpendiculum E *n* ita erit *ſuperficies conica* terminata à *linea hyperbolica* C F D & rectis D A, A C ad Triangulum A C D. q. E. D.

Prop.

Prop. 3.

Fig. 178. Datus sit *Conus rectus* A B C *p*. Secetur à plano (puta *triangulo q r t*) quod quidem planum secabit *axem coni* in puncto *q* supra *verticem* productum & in communi intersectione cum *superficie coni* habebit *lineam hyperbolicam* R S *t* ducantur à vertice coni A rectæ A *r*, A *t*, à puncto *q* demittatur perpendiculum *q* X lateri coni A *p* producto & à puncto A perpendiculum A Z plano *q r t*.

Dico *superficies conica* terminata à *linea hyperbolica*, *r s t* & rectis *r* A, *t* A, ita se habet ad *figuram hyperbolicam cavam q r s t q* ut *perpendiculum* A Z ad *perpendiculum q* X.

Recta enim *qr*, circumlata, quiescente termino *q* per lineas *rst*, *t* A, A *r* generat tres *superficies*, nempe *hyperbolicam cavam q r*, *s t*, & *duo triangula q t* A, *q* A *r*, quæ unà cum *superficie conica* terminata à lineis *r s t*, *t* A, A *r*, comprehendunt *Solidum q r s*, *t* A *r*. Hoc verò *solidum æquale* est *pyramidi* cujus *altitudo* est æqualis perpendiculo *q* X, nam infinitæ pyramides *q* A *r* V, *q* A V V, exhauriunt solidum *q r* S *t* A *r*. Si verò aliter contemplari volumus, hoc solidum *q r s t* A *r* potest considerari tanquam *figura conica* A *r* S *t q r* habens pro *base figuram hyperbolicam* cavam *q r* S *t q*, & pro altitudine *perpendiculum* A Z. Ergò reciprocando *bases altitudinibus*, ut A Z ad *q* X, ita *superficies*, *r* S *t* A *r* ad *figuram hyperbolicam cavam q r* S *t q*.

Prop. 4.

Fig. 179. Datus sit *Conus rectus* A B *h g* secetur à plano H F E G per axem infra verticem, a puncto H ubi *planum* secat *axem coni*, demittatur H K *perpendiculum* lateri cuilibet coni & à verticè A *perpendiculum* A L plano H F E G.

Dico, *Superficies conica* terminata à lineis F E G G A A F ita se habebit ad *planum* H F E G ut *perpendiculum* A L ad *perpendiculum* H K

Probatur eodem fere eodem fere argumento quo superior.

Præcedentia

APPENDICULA 3.

Præcedentia recolenti nonnulla videntur elapſa; quæ forſan ex uſu ſit adjicere. *Demonſtrationes* elicere poterit quiſpiam è præmiſſis; & potior inde fructus emerget.

Problema I.

Fig. 180.

Sit *curva* quævis KEG, cujus *axis* AD; & in hoc ſignatum punctum A; curva reperiatur, puta LMB, talis, ut ſi ductâ utcunque rectâ PEM axi AD perpendicularis curvam KEG ſecet in E, & curvam LMB in M; nec non connectatur AE, & curvam LMB tangat recta TM; ſit TM ipſi AE parallela.

Hoc ità fiet. Per aliquodcunque punctum R, in axe AD ſumptum, protendatur recta RZ ad ipſam AD perpendicularis; cui occurrat recta EA producta in S; & in recta EP ſumatur PY = RS; ità determinetur curvæ OYY proprietas; tum ſit rectangulum ex AR, & PM æquale ſpatio AYYP (ſeu $PM = \frac{\text{ſpat. AYYP}}{AR}$) habebit curva LMMB conditionem propoſitam.

Adnotari poteſt, ſi ſtantibus reliquis, ſit curva QXX talis, ut cum hanc ſecet recta EP in X, ſit PX = AS; erit ſpatium AXXP æquale rectangulo ex AR, & curva LM, ſeu $\frac{AXXP}{AR} = LM$.

Exemp. I.

Sit ADG *circuli* quadrans, & ductâ EP ad AD utcunque perpendiculari, connexâque DE; deſignetur curva AMB talis, ut ſi producta recta EPM hanc ſecet in M, ipſamque tangat recta MT, ſit MT ad DE parallela. Hoc ita peragetur. Ducatur AZ ad DG parallela; & huic occurrat producta DE in S, & curva AYY talis ſit, ut ſi hanc ſecet producta PE in Y, ſit PY = AS; tum capiatur $PM = \frac{\text{Spat. AYP}}{AD}$; factum erit. Fig. 181.

Nota. Quòd ſi curva QXX talis ſit, ut PX = DS (vel ſi AQ = AD, & QXX ſit *hyperbola* angulo ADG comprehenſa) erit curva AM × AD = ſpat. AQXP.

Exemp. II.

Fig. 182. Sit curva A E G (cujus *axis* A D) proprietate talis, ut ſi à quocunque puncto in ipſa ſumpto E, ducatur recta E P ad A D normalis; connectatúrque A E, ſit A E inter deſignatam A R, & A P proportione media, ſecundum ordinem, cujus exponens ſit $\frac{n}{m}$; reperiatur curva A M B, quam tangat T M ad A E parallela.

De curva A M adnoto fore $n . m :: A E . \text{arc. } A M$.

Si $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$ (vel A E ſit inter A R, A P ſimpliciter media) erit A E G circulus, & A M B *Ciclois primaria*; hujus igitur dimenſio è lege generali habetur.

Hæc etiam ex adjuncto *Problemate* magis ccomprehenſivo peraguntur.

Probl. II.

Fig. 183. Curva deſignetur, puta A M B, cujus *axis* A D, ità ut in hac ſumpto puncto quopiam M, & ductâ M P ad A D perpendiculâri, & poſito rectam M T ipſam tangere, habeant T P, P M relationem aſſignatam.

Accipiatur recta quæpiam R, & fiat ut T P ad P M (quam utique rationem aſſignatâ dabit relatio) ità R ad P Y (quæ nempe ſumatur in recta P M, & ad axem A D ordinetur) ſic ut per ejuſmodi puncta Y tranſeat curva Y Y K; tum ſi fiat $P M = \frac{\text{ſpat. A P Y}}{R}$; de curvæ A M B indè conſtabit natura.

Exemp. I.

Fig. 184. Sit A D G *circuli* quadrans; cujus radius æquetur deſignatæ R; & habere debeat T P ad P M rationem eandem quam habet R ad arcum A E; ergo quum ſit, juxta præſcriptum, R. arc. A E :: R. P Y; erit P Y = arc. A E; hinc habetur $P M = \frac{A P Y}{R}$. *Exemp.*

Exemp. II.

Sit A D G *circuli* quâdrans, & habere debeat T P ad P M rationem eandem quam P E ad R; eſt ergo P Y æqualis *tangenti* arcûs GE; & ſpat. A P Y Y = R × arc. A E. adeóque P M = arc. A E.

Probl. III.

Proponatur figura quælibet A D B (cujus *axis* A D, *baſis* D B) reperiatur curva K Z L, proprietate talis, ut ductâ rectâ Z P M ad D B utcunque parallela quæ lineas expoſitas ſecet ut cernis) poſitóque rectam Z T tangere curvam K Z L, ſit intercepta T P æqualis ipſi P M. Fig. 185.

Hoc ità perficietur. Sit curva O Y Y talis, ut adſumptâ quâdam R, protractâque P M Y, ſit P M. R:: R. P Y; tum liberè adſumptâ D L (in B D protensâ) ſit D L. R:: R. L E; & *aſymptotis* D L, D G per E deſcribatur *Hyperbola* E X X; tum ſit ſpatium L E X H æquale ſpatio D O Y P, & protractæ X H, Y P concurrant in Z; erit Z in curva quæſita; quam ſi tangat Z T, erit T P = P M.

Adnotetur, ſi propoſita figura ſit *rectangulum Parallelogrammum* A D B C, quod curvæ K Z L hæc erit proprietas, ut ſit D H eodem ordine inter D L, D O media *Geometricè* proportionalis, quo D P inter D A & o (ſeu nihilum) eſt media *Arithmeticè*; quod ſi liberè juxta proprietatem hanc deſcribatur curva K Z L, & *Mechanicè* reperiatur tangens Z T, indè quadrabitur *hyperbolicum ſpatium* L E X H; erit utique hoc æquale *rectangulo* ex T P, A P. Fig. 186.

Subnotari poſſit fore 1. Spat. A D L K = R × D L — D O. 2. Summam Z P q = R × : $\frac{DLq - DOq}{2}$. & ſummam Z P cub. = R × $\frac{DL\text{ cub.} - DO\text{ cub.}}{3}$ &c. 3. Si ponatur φ eſſe centrum gr. figuræ A D L K, ducantúrque φ ↓ ad A D, & φ ξ ad D L perpendiculares, fore φ ↓ = $\frac{DL + DO}{4}$, & φ ξ = R — $\frac{AD \times DO}{LO}$.

Probl. IV.

Fig. 187. Sit angulus B D H rectus, & B F ad D H parallela; & *aſymptotis* D B, D H per F deſcripta ſit *hyperbola* F X G; item centro D deſcriptus ſit circulus K Z L; ſit denuò curva A M B talis, ut in hac ſumpto quocunque puncto M, & per hoc trajectâ rectâ D M Z, item ſumptâ D I = D M; & ductâ I X ad B F parallelâ, ſit *ſpatium hyperbolicum* B F X I æquale duplo *circulari ſectori* Z D K; curvæ A M B tangens ad M determinetur.

Ducatur D S ad D M perpendicularis; ſitque D B × B F = R q; fiátque D K. R :: R. P; tum D K. P :: D M. D T; & connectatur T M; hæc curvam A M B tanget.

Adnotetur curvæ A M B hanc eſſe proprietatatem; ut D I ſit inter D B, D O (vel D A) eodem ordine *media proportionalis Geometricè*, quo arcus K Z inter *o* (ſeu nihilum) & arcum K L eſt medius *Arithmeticè*. hoc eſt, ſi D I ſit numerus in ſerie *Geometricè proprtionalium* incipiente à D B, & terminatâ in D A; ac *o*, K L ſint Logarithmi ipſarum D B, D A; erit K Z Logarithmus ipſius D I. Vel retrò (prout vulgares *Logarithmi* procedunt, ſi D I ſit numerus in ſerie *Geometrica* exorſa à D O, & deſinente in D B ac *o* ſit *Logarithmus* ipſius D O, & arcus L K ipſius D B, erit arcus L Z *Logarithmus* ipſius D I.

Quod ſi abſolutè conſtruatur curva A M B, ejúſque *tangens Mechanicè* deprehendatur, inde patet *hpperbolici ſpatii Cycliſmum* dari, vel *Circuli hyperboliſmum*.

Hujuſce *Spiralis* naturam, ac dimenſionem (ut & Spatii B D A dimenſionem) luculentè proſecutus eſt præclariſſimus D. *Walliſius*, in Libro de *Cycloide*; quapropter de illa plura reticeo.

Probl. V.

Fig. 188. Sit ſpatium quodpiam E D G (rectis D E, D G, & linea E N G comprehenſa) & data quædam R; curva A M B reperiatur talis, ut ſi utcunque à D projiciatur recta D N M, & D T ad hanc perpendicularis ſit, & M T curvam A M B contingat; ſit D T. D M :: R. D N.

Sit curva K Z L talis, ut D Z = $\sqrt{R \times D N}$; ſumptâque liberè rectâ

rectâ DB, ſit DB.R::R.BF (ſit autem BF, ut & DH ipſi DB perpendicularis) tum per F, angulo BDH incluſa, tranſeat *hyperbola* FXX; ſitque ſpatium BFXI (poſitâ nempe IX ad BF *parallelâ*) æquale duplo ſpatio ZDL; ſit denuò DM = DG; erit M in curva quæſita; quam utique ſi tangat recta TM, erit TD.DM::R.DN.

Probl. VI.

Sit rurſus ſpatium EDG (ut in præcedente) reperienda eſt curva AMB, ad quam ſi projiciatur recta DNM, & ſit DT huic perpendicularis, & MT curvam AMB tangat, fuerit DT = DN. Fig. 188.

Adſumatur quæpiam R, & ſit $DZ\ q = \frac{R^3}{DN}$; item acceptâ DB (cui perpendiculares DH, $BF = \frac{R^3}{DBq}$; & per F intra *aſymptotos* DB, DH deſcribatur *hyperboliformis* ſecundi generis (in qua nempe ordinatæ, ceu BF, vel IX, ſint quartæ proportionales in ratione DB ad R, vel DG ad R) tum capiatur ſpatium BIXF æquale duplo ZDL; & ſit DM = DI; erit M in curva quæſita; quam ſi tangat MT, erit DT = DN.

Probl. VII.

Sit figura quævis ADB (cujus *axis* AD, *baſis* DB) & utcunque ductâ PM ad DB parallelâ datum ſit (ſeu expreſſum quomodocunque) ſpatium APM, oportet hinc ordinatam PM exhibere, vel exprimere. Fig. 189.

Acceptâ quâqiam R, ſit R × PZ = APM; hinc emergat linea AZZK; huic perpendicularis reperiatur ZO; tum erit PZ.PO::R.PM.

Exemp. AP vocetur x & ſit $APM = \sqrt{rx^3}$, ergo $PZ = \sqrt{\frac{x^3}{r}}$; unde reperietur $PO = \frac{3xx}{2r}$. Eſtque $\sqrt{\frac{x^3}{r}} . \frac{3xx}{2r} :: r . \frac{1}{2}\sqrt{rx} = PM$. unde AMB eſt *Parabola*, cujus *Parameter* eſt $\frac{2}{4}r$.

Aliter.

Aliter. Fiat $PZ = \sqrt{2}\,APM$. & sit ZO curvæ AZK perpendicularis; erit $PM = PO$.

Exemp. Sit $AP = x$; & $APM = \frac{x^3}{r}$. quare $PZ = \sqrt{\frac{2x^3}{r}}$

unde reperietur $PO = \frac{3xx}{r} = PM$; & rursus AMB erit *Parabola.*

Probl. VIII.

Fig. 190. *Sit* figura quævis ADB (rectis DA, DB, & linea AMB comprehensa) & à D utcunque projectâ rectâ DM, datum sit spatium ADM; oportet rectam DM definire.

Acceptâ quâpiam R, sit $DZ = \frac{2\,ADM}{R}$; & ZO curvæ AZK perpendicularis; cui occurrat DH ad DM perpendicularis; erit $DM = \sqrt{R \times DO}$.

Aliter. Sit $DZ = \sqrt{4\,ADM}$; & ZO curvæ AZK perpendicularis; cui occurrat DH ad DZ perpendicularis; erit $DM = \sqrt{DZ \times DO}$.

De figuris involutis & evolutis bellam στάσιν instituit *Præclarus Geometra D. Gregorius Alerd.* Alienæ messi nollem ego falcem meam immittere, verum liceat utcunque isthuc pertinentes (aliud agenti quæ mihi se ingesserunt) unam aut alteram observatiunculam his intexere.

Probl. IX.

Fig. 191. Data sit figura quæpiam ADB (cujus *axis* AD, *basis* DB) oportet ei congruentem involutam exhibere.

Fig. 192. *Centro* C, intervallo quopiam CL describatur *Circulus* LXX; sit autem curva KZZ talis, ut pro lubitu ductâ rectâ MPZ ad BD parallelâ,

rallelâ, sit rectangulum ex PM, PZ æquale quadrato ex CL (vel $PZ = \frac{CL^q}{PM}$). Sit tum arc. $LX = \frac{\text{spat. } DKZP}{CL}$ (vel sector LCX subduplus spatii DKZP) & in CX capiatur $C\mu = PM$; erit linea $C\mu\mu$ ipsius BMA involuta; vel spatium $C\mu C$ spatii ADB.)

Exemp. Sit ADB circuli quadrans; erit ergò (quod è præmonstratis constat) spat. DKZP (2 sector LCX). sect. BDM :: CLq. DBq. unde arc. LX. arc. BM :: CL. DB. quare ang. LCX = ang. BDM = ang. DMP, unde ang. $C\mu C$ est rectus, adeóque linea $C\mu C$ est *semicirculus.*

Coroll. 1. Subnotari potest, si duæ figuræ ADB, ADG analogæ fuerint; & harum *involutæ* sint $C\mu C$, $C\nu\gamma$; & fuerit $C\mu . C\nu$ :: DB. DG; erit reciprocè ang. $CC\mu . C C\nu$ :: DG. DB. Fig. 193.

2. Illud etiam conversè valet.

3. Sin curvæ $C\nu\chi$, CSC suo modo analogæ fuerint, hoc est, si utcunque à C projectâ rectâ $C\nu S$, habeant $C\nu$, CS eandem perpetuò rationem, erunt hæ similium linearum *involutæ.* Fig. 194.

Probl. X.

Data figurâ quâpiam $CC\varphi$ rectis CC, $C\varphi$, & aliâ lineâ $C\varphi$ comprehensâ, ei competentem *evolutam* designare. Fig. 195.

Centro C utcunque describatur *circularis arcus* LE (cum rectis Cc, $C\varphi$ constituens sectorem LCE) tum ductâ CK ad LC perpendiculari, sit curva $C\gamma$H ità rectam CK respiciens, ut liberè projectâ rectâ $C\mu Z$, sumptâque CO = arc LZ, ductâque OY ad CK perpendiculari, sit $OY = C\mu$; porrò ad rectam DA sic referatur curva BMF, ut cùm sit $DP = \frac{\text{spat. } CC\gamma O}{CL}$; & PM ad DA perpendicularis; sit etiam $PM = C\mu$; erit spatium DBFA ipsius $CC\varphi$ *evolutum.* Fig. 196.

Exemp. Sit LZE arcus circuli centro C descripti, & $C\mu C$ ejusmodi *spiralis* Fig. 197.

ſpiralis, ut pro arbitrio ductâ rectâ CμZ habeat arcus EZ ad rectam Cμ rationem aſſignatam (puta R ad S) Manifeſtum eſt lineam ϵYH eſſe rectam, quoniam EZ (KO). Cμ (OY) :: R. S, perpetuò. unde evoluta BMF fit *Parabola*; quoniam axis partes AP, AD ſe habent ut ſpatia KOY, KCϵ, hoc eſt ut quadrata ex ipſis OY, Cϵ, vel ex ipſis PM, DB.

Fig. 198.

Corol. Theor. I.

Si ad figuram ϵCϕ erigatur *cylindricus* altitudinem habens æqualem peripheriæ integræ *circuli*, cujus radius CL; erit iſte *cylindricus* æqualis *ſolido*, quod procreatur è figurâ CϵHK circa axem CK rotatâ.

Theor. II.

Fig. 195. Sit curva quæpiam AMB (cujus axis AD, baſis DB) & curva AZL talis, ut liberè ductâ rectâ ZPM, ſit PZ = $\sqrt{2}$APM; ſit item alia curva OYY talis, ut ad hanc productâ rectâ ZPMY, adſumptâque rectâ R, ſit ZPq. Rq :: PM. PY; ſitque denuò DL. R :: R. LE. & per E intra angulum LDG deſcribatur *Hyperbola* EXX; huic autem occurrat ducta recta ZHX ad AD parallela, erit ſpatium PDOY æquale *ſpatio Hyperbolico* LHXE.

Fig. 199.

Hinc *ſumma* omnium $\frac{PM}{APM} = \frac{2LEXH}{Rq}$.

Theor. III.

Sit curva quæpiam AMB, cujus axis AD, baſis DB; & curva KZL talis, ut adſumptâ quâdam R, & arbitrariè ductâ rectâ ZPM ad BD parallelâ, ſit $\sqrt{}$APM. PM :: R. PZ; erit ſpatium ADLK æquale *rectangulo* ex R in $2\sqrt{}$ADB; vel $\frac{ADLK}{2R} = \sqrt{}$ADB.

Fig. 200.

Exemp. Sit ADB circuli quadrans, erit ſumma omnium $\frac{PM}{APM}$ = $\sqrt{2}$DA × arc. AB.

Theor. IV.

Sit curva quæpiam AMB (cujus axis AD, baſis DB) ſintque duæ lineæ EXK, GYL ità relatæ, ut in curva AMB ſumpto quopiam

am puncto M, ductíſque rectis MPX ad BD, & MQY ad AD parallelis, poſitóque rectam MT tangere curvam AMB, ſit TP. PM :: QY. PX; erunt figuræ ADKE, DBLG ſibimet æquales. Fig. 201.

Valet hoc converſum. Nempe ſi figuræ ADKE, DBLG æquentur, & MT curvam AMB tangat, erit TP. PM :: QY. PX:

Not. Omnium hactenus Propoſitorum fœcundiſſimum eſt hoc *Theorema*; præcedentium quippe complura vel in eo continentur, aut ab eo facilè conſectantur. Nam poſito lineam AMB indeterminatam eſſe naturâ, ſi ipſarum EXK, GYL alterutra pro tuo arbitratu determinetur, exinde reſultabit Theorema quoddam ejuſmodi, qualia ſuperiùs exhibentur aliquammulta. Si *e. g.* linea GYL ponatur recta cum ipſa BD ſemi-rectum conſtituens angulum (quo caſu concipiuntur puncta D, G coincidere) proveniet indè prima *Lectionis* XI. Si GYL ſit recta ad DB parallela, emerget *Lectionis ejuſdem.* Rurſus ſi PM = PX (vel lineæ AMB, EXK ſint eædem) conſequetur hinc *decima* ejuſdem. Exhinc porrò liquet adſumpto cuilibet ſpatio *infinita, genere diverſa, ſpatia æqualia* facilè deſignari veluti ſi *ſpatium* DGLB ponatur *circuli quadrans*, cujus *centrum* D; & curva AMB ſit *parabola*, cujus *axis* AD, emerget curvæ EXK hæc proprietas, ut (ſi dicatur DB = r; AP = x; PX = y; & k (vel $\frac{DBq}{2AD}$) ſit *parabolæ ſemiparameter*) ſit $\frac{rrk}{2} = kkx + xyy$. Sin AMB ponatur *hyperbola*, procreabitur alterius generis curva EXK. Fig. 202. his autem expenſis ἀβλεψίαν meam incuſo, qui non hoc *Theorema* (ſicut & ea quæ ſubſequuntur, quorum ferè ratio conſimilis eſt, & ſuppar uſus) primo loco poſuerim, & ex eo (nec non è reliquis mox ſubjiciendis) quod fieri poſſe video, reliqua deduxerim. Veruntamen hujuſmodi *Phrygiam ſapientiam* juxta mecum pleriſque familiarem autumo, literas has tractantibus.

Theor. V.

Sit ſpatium quodpiam ADB (rectis DA, DB, & curva AMB comprehenſum) ſint item curvæ EXK, GYL ità relatæ, ut ſi in curva AMB liberè ſumatur punctum M, ducatur DMX, ſit DQ = DM, ducatur QY ad DB perdendicularis, ſit DT ad DM perpendicularis, recta MT curvam AMB contingat; ſi, his inquam ſuppoſitis, ſit TD. DM :: DM × QY. DXq; erit ſpatium DGLB ſpatii EDK duplum. Fig. 203.

Theor. VI.

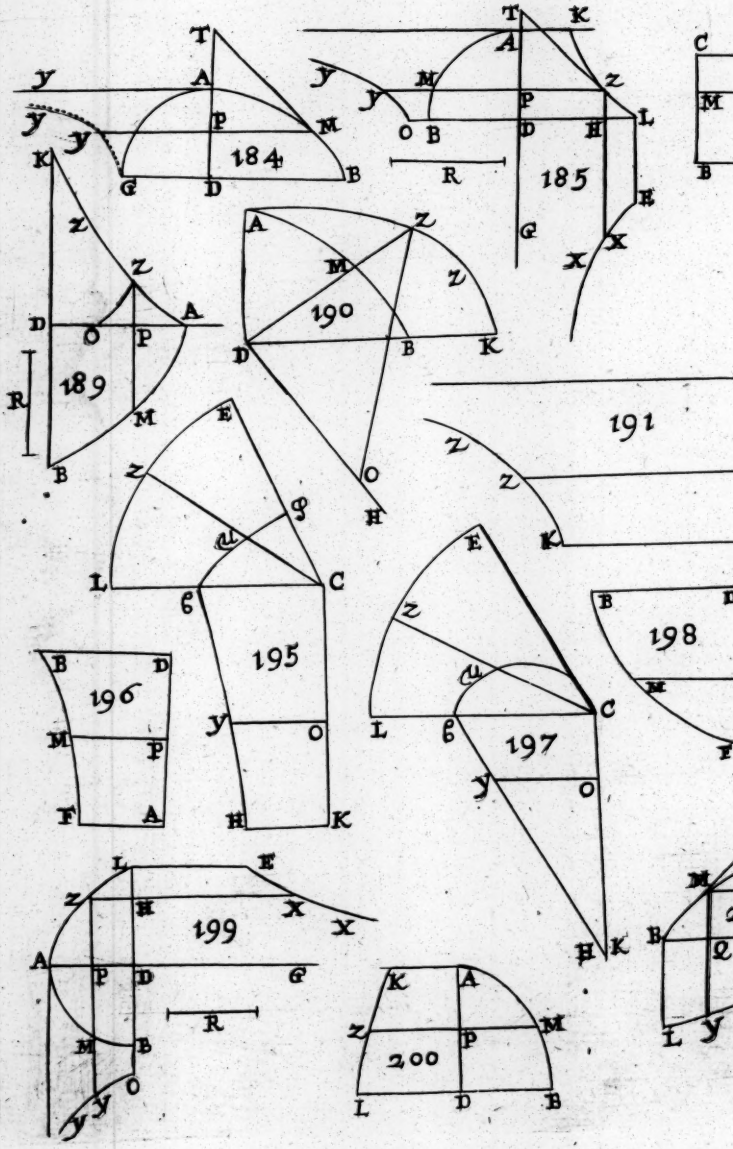
Fig. 204. Sit rurſus A M B curva quævis (cujus axis A D, baſis D B) & curvæ E X K, H Z O ita verſus ſe, & axes A D, $\alpha\zeta$ relatæ, ut arbitrariè in curva A M B accepto puncto M, & ductâ M P X ad A D perpendiculari, ſumptâ $\alpha\mu$ = arc A M, ductâ μ Z ad $\alpha\zeta$ perpendiculari, poſitóque rectam T M curvam A M B tangere; ſit T P . T M :: μ Z . P X; erunt ſpatia A D K E, $\alpha\zeta$ O H æqualia ſibi.

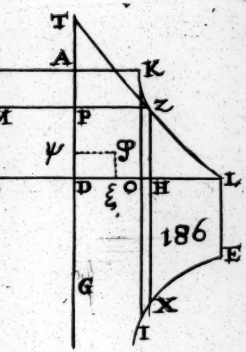
Theor. VII.

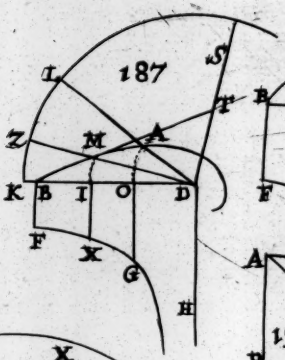
Fig. 204, 205. Sit ſpatium quodpiam A D B (rectis D A, D B, & curvâ A M B definitum) ſint item curvæ E X K, H Z O ità relatæ, ut ſi quodvis capiatur punctum M in curva A M B, projiciatur recta D M X, ſumatur $\alpha\mu$ = arc A M; ducatur μ Z ad rectam $\alpha\zeta$ perpendicularis; ſit D T perpendicularis ipſi D M; recta M T curvam A M B tangat; ſit T D . T M :: D M × μ Z . D X q; erit ſpatium $\alpha\zeta$ O H ſpatii E D K duplum.

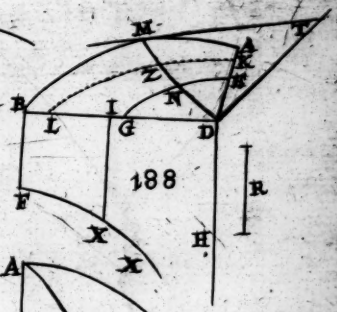
Sed horum hic eſto terminus.

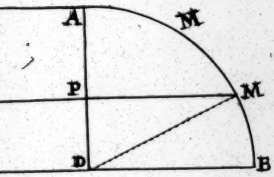
LECT

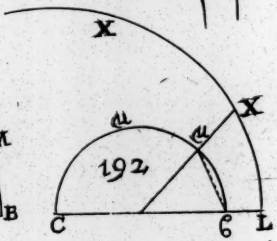

184
185
189
190
191
195
196
197
198
199
200

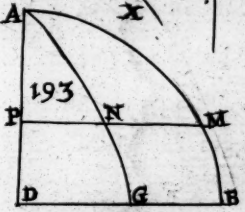

T
A
K
M
P
Z
Ψ
Φ
D
ξ
O
H
L
186
E
G
X
I


187
S
L
T
Z
M
A
K
B
I
O
D
F
X
G
H

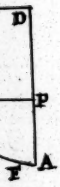

M
T
A
K
Z
N
M
B
L
I
G
D
188
R
F
X
H

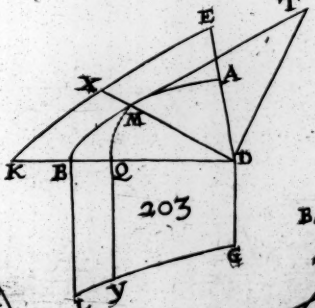

A
M
P
M
D
B

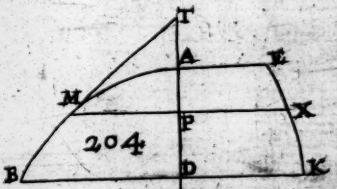

X
192
X
C
G
L

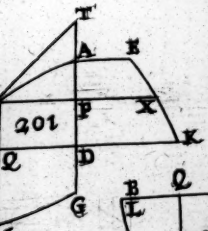

A
193
P
N
M
D
G
B

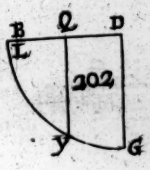
S
194
C
G

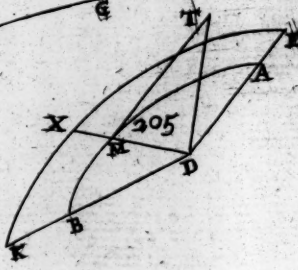

D
P
F
A

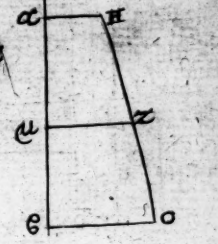

E
T
X
A
M
K
B
Q
D
203
L
y
G


T
A
E
M
P
X
204
B
D
K


T
A
E
201
P
X
K
Q
D
G
y


B
Q
D
L
202
y
G


T
E
A
X
205
M
D
K
B


a
H
Z
G
O

Lect. XIII.

Æquationum naturam è terminorum *analogia* expoſuit *Vieta*; illam ex eorum in ſe ductu dilucidiùs explicuit *Carteſius*. Eam ego jam è linearum ſingulis appropriatarum deſcriptione conabor aliquatenus enucleatam dare; qui ſanè modus rem præſertim elucidare videtur, ac ob oculos ponere, agedum.

Notetur, In ſequentibus perpetim ad eaſdem ſeries redigi æquationes, quæ *coefficientes* habent eaſdem.

Æquationum Series prima.

$$a + b = n.$$
$$aa + ba = nn.$$
$$a^3 + baa = n^3.$$
$$a^4 + ba^3 = n^4, \&c.$$

Sumatur recta B A æqualis coefficienti b, & hæc verſus H indefinitè protendatur; ſint anguli R A H, S B H ſemirecti, ſintque lineæ A L L, A M M, A N N tales, ut rectâ G K ductâ ad A H utcunque perpendiculari (quæ dictas lineas ordine ſecet punctis L, M, N; rectaſque B S, A R punctis K, Z) ſit inter G Z, G K *media* G L *, *bimedia* G M, *trimedia* G M; hæ lineæ propoſitarum æquationum naturæ explicandæ inſervient. Nam ſi A G (vel G Z) dicatur a; erit B G (vel G K) $= b + a$; atque G L q $= aa + ba$; & G M cub. $= a^3 + baa$; & G N $qq = a^4 + ba^3$. Fig. 206.

* Vid. *pag.* 90.

Notetur autem,

1. Ducta A D ad B H perpendiculari, si in hac capiatur A E = n; ducatúrque E F ad A H parallela; hujus cum lineis expositis intersectiones æquationum propositarum radices exhibebunt respectivè; erit utique F K, vel E L, vel E M, vel E N æqualis ipsi a; hoc est ipsis A G, concipiendo à singula intersectione deduci ad A H perpendiculares, quæ puncta G determinet. Fig. 206.

2. Quò punctum G magìs à termino A removetur (& quidem potest G A desumi quavis designatâ major) eò ordinatæ G K, G L, G M, G N magìs increscunt; adeò ut quantacunque ponatur A E, parallela E F curvis occursura sit; & proinde semper habetur vera radix istarum æquationum cuilibet conveniens; & ea tantùm una, quoniam E F curvas istas unico puncto intersecat.

3. *Curva* A L L est *hyperbola æquilatera*, cujus *axis* A B, reliquæ A M M, A N N sunt *hiperboliformes*.

4. Si A O sit $\frac{1}{2}$ A B; & A P = $\frac{1}{3}$ A B, & A Q = $\frac{1}{4}$ A B, ducantúrque O T, P V, Q X ad B S parallelæ, erunt hæ curvarum A L L, A M M, A N N *asymptoti*.

5. Hinc constat in secundo gradu fore $a \sqsubset n - \frac{b}{2}$; in tertio $a \sqsubset n - \frac{b}{3}$; in quarto $a \sqsubset n - \frac{b}{4}$; quæ tamen inæqualitates, si A E benemagna sit, exiguæ erunt.

6. Æquationibus istis nulla competit *maxima*, *vel minima*.

Series secunda.

$$a - b = n.$$
$$aa - ba = nn.$$
$$a^3 - baa = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 = n^4, \text{ &c.}$$

Sit rursus A B = b; & indefinitè protrahatur A B versus I, & sint anguli R A I, S B I semirecti; tum concipiantur curvæ B L L, B M M, B N N tales, ut si utcunque ducatur G Z ad A I perpendicularis (dictas lineas secans, uti cernis, punctis K, L, M, N, Z) sit inter G Z, Fig. 207.

GZ, GK media GL, bimedia GM, trimedia GN; propoſitas æquationes explicabunt hæ lineæ. Nam ſi AG (vel GZ) vocetur a; erit BG (vel GK) $= a - b$; & GLq $= aa - ba$; & GM cub. $= a^3 - baa$; & GNqq $= a^4 - ba^3$.

Not.

1. Ductâ AD ad AI perpendiculari, & EF ad AI parallelâ, ſi AE ponatur æqualis ipſi n; erunt EK, EL, EM, EN radices æquationum reſpectivæ, ſeu æquales quæſitis a.

2. Quoniam ordinatæ GK, GL, GM, GN à termino B verſus I infinitè excreſcunt, ſemper habetur una vera radix, & unica.

3. Curva BLL eſt *hyperbola æquilatera*, cujus *axis* AB, reliquæ curvæ ſunt *hyperboliformes*.

4. Si AB biſecetur in O, triſecetur in P, quadriſecetur in Q, ducantúrque ad AR parallelæ OT, PV, QX, erunt hæ curvarum BLL, BMM, BNN *aſymptoti*.

5. Hinc ſequitur in ſecundo gradu fore $a \sqsubset n + \frac{b}{2}$; in tertio $a \sqsubset n + \frac{b}{3}$; in quarto $a \sqsubset n + \frac{b}{4}$; quòd ſi n ſatis magna ſit, iſtæ inæqualitates ad æqualitatem proximè accedunt.

6. Verarum in his radicum habetur *minima*; ſcilicet ipſa AB, vel b.

Series tertia.

$b - a = n.$
$ba - aa = nn.$
$baa - a^3 = n^3.$
$ba^3 - a^4 = n^4.$ &c.

Sit AB $= b$, & anguli RAB, SBA ſemirecti; tum curvæ ALB, AMB, ANB tales, ut ductâ rectâ GK ad AB utcunque perpendiculari (quæ lineas expoſitas ſecet, ut vides) ſit inter AG (ſeu GZ) & GK *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; propoſitas æquationes explicatas dabunt hæ lineæ. Nam poſito fore AG $= a$, erit GK $= b - a$; & GLq $= ba - aa$; & GMq $= baa - a^3$. & GNq $= ba^3 - a^4$. Fig. 280.

Not.

Not.

Fig. 208. 1. Si in A D (ad ipſam A B perpendiculari) deſumatur A E = n; & ducatur E F ad A B parallela, hujuſce cum lineis expoſitis interſectiones exhibebunt radices a reſpectivè.

2. Cùm ad haſce curvas ordinatæ ſemper terminatæ ſint, & inter ipſas maxima quædam detur, hujus *ſeriei æquationes*, pro modulo aſſignatæ A E (vel n) ſubinde duas radices veras habent (cùm utique fuerit A E curvæ maximâ ordinatâ minor reſpectivè, hoc eſt cùm E F curvæ bis occurrerit) nonnunquam duntaxat unam (cum A E nempe maximam adæquet, adeóque E F curvam contingat) aliquando nullam (cum ſcilicet A E maximam excedat, adeóque nec E F curvæ unquam occurrat).

3. In ſecundo gradu ſi A O = O B, & ordinetur O T, erit O T maxima, (adeóque radicum una major quàm $\frac{A B}{2}$, altera minor) in tertio, ſi A P = 2 P B, & ordinetur P V, erit P V maxima (unde radicum una major erit quàm $\frac{1}{3}$ A B, altera minor) demùm in quarto gradu ſi A Q = 3 Q B, & ordinetur Q X, erit Q X *maxima* (& hinc una radicum ſemper major, quàm $\frac{1}{4}$ A B, & altera minor).

4. Hinc conſectatur, ſi fuerit, in ſecundo gradu $n \sqsubset \frac{b}{2}$; in tertio $n^3 \sqsubset \frac{4b^3}{9} - \frac{8b^3}{27} = \frac{4b^3}{27}$; in quarto $n^4 \sqsubset \frac{27}{64}b^4 - \frac{81}{256}b^4 = \frac{27b^4}{256}$; nullam dari radicem.

5. Omnium radicum *maxima* eſt ipſa A B, vel b.

6. Omnium curvarum communis *interſectio* (ſeu *nodus*) eſt punctum T; & ſi fuerit $n = \frac{b}{2}$; ſemper A O (vel $\frac{b}{2}$) eſt una radix.

7. Curva A L B eſt *Circulus*, reliquæ A M B, A N B eum quodammodo referunt.

1.	2.	3.
$a+b=n$	$a-b=n.$	$b-a=n.$
$a+b=\frac{nn}{a}$	$a-b=\frac{nn}{a}$	$b-a=\frac{nn}{a}$
$a+b=\frac{n^3}{aa}$	$a-b=\frac{n^3}{aa}$	$b-a=\frac{n^3}{aa}$
$a+b=\frac{n^4}{a^3}$	$a-b=\frac{n^4}{a^3}$	$b-a=\frac{n^4}{a^3}$

Aliter

Aliter (& forte commodiùs; pro ſingulo trium ſerierum gradu tantùm unam adhibendo lineam) explicantur iſtæ præcedaneæ æquationes, hoc pacto:

Sit A H recta indefinitè protenſa, & huic perpendicularis A D; in qua ſumatur A B = *n*, & ducatur B K ad A H parallela, tum ſint lineæ L XL, M XM, N XN tales, ut ſumpto in A H quocunque puncto G, & ductâ G K ad A D parallelâ, ſit in proportione A G ad G K (vel A B) proportione *tertia* G L, *quarta* G M, *quinta* G N; hæ lineæ propoſitarum æquationum naturæ explicandæ inſervient. Fig. 209, 210.

Nam ſumpta A E = *b* (ſumatur autem A E ob primam ſeriem ad partes I, ob ſecundam & tertiam ad partes H) & fiat angulus F E H ſemirectus (iſte quidem pro prima & ſecunda ſerie inclinans verſus H, pro tertia reclinans ab H, ut Schema ſatis monſtrat) tum rectæ E F cum expoſitis lineis interſectiones reſpectivæ radices *a* determinabunt; nempe ſi per has ductæ concipiantur ad A H perpendiculares (L G, M G, N G) erunt interceptæ A G radicibus *a* æquales reſpectivè.

Not.

Exhinc conſtat, quòd

1. In hac explicatione *coefficiens b* indeterminata habetur; ut in præcedentibus ipſa *n*.

2. In prima & ſecunda ſerie ſemper una poſitiva radix habetur, & unica.

3. In ſecunda ſerie minima radix ipſi A B, vel *n* æquatur.

4. Communis omnium linearum *nodus* eſt *punctum* X, ubi B X (vel *a*) = *n*.

5. In tertia ſerie ſubindè duæ habentur radices poſitivæ (quando ſcilicet E F curvas bis ſecat) nonnunquam una tantum (cùm E F ipſarum aliquam contingat; id quod accidit in ſecundo gradu cùm $a = \frac{b}{2}$; in tertio cùm $a = \frac{2}{3}b$; in quarto cùm $a = \frac{1}{4}b$) aliquandò nulla, cùm E F infra tangentes cadit, & adeò nuſquam curvis occurrit.

6. Secundi gradûs curva eſt *hyperbola*, reliquæ *hyperboliformes*, quarum communes *aſymptoti* ſunt rectæ A H, A D.

Series

Series quarta.

$$a + \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa + cc = nn.$$
$$a^3 + cca = n^3.$$
$$a^4 + cc aa = n^4.$$

Fig. 211. Sit recta indefinitè protenſa AH, & huic perpendicularis AD; fiat autem angulus RAH ſemirectus; tum utcunque ducatur GZK ad AD parallela; & facto AG. AG :: AC. ZK; per K intra angulum DAR deſcribatur *hyperbola* KXK; ſint denuò curvæ CLL, AMM, ANN tales, ut inter GZ, GK ſint *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ propoſito deſervient. Nam ſi AG (vel GZ) dicatur a, erit $GK = a + \frac{cc}{a}$; & $GLq = aa + cc$; & $GM\,cub = a^3 + cca$; & $GNqq = a^4 + ccaa$.

Not.

1. Deſignantur radices, ut in præcedentibus, poſitâ AE = n, & ductâ EF ad AH parallelâ.

2. Si AP = AC, erit PX ad *hyperbolam* KXK ordinatarum *minima*; unde ſi AE (vel n) $\sqsupset$ PX; nulla dabitur radix in primo gradu.

3. Curva CLL eſt *hyperbola æquilatera*, cujus *centrum* A, *ſemiaxis* AC; quæ & ordinatarum eſt *minima*; alioquin ſi $n \sqsubset c$, ſemper una vera radix habetur, & unica.

4. Reliquæ AMM, ANN ſunt hyperboliformes ad infinitum excurrentes; unde ſemper una vera radix habetur, neque plures.

5. Si fuerit $Y\alpha = \frac{1}{2} YX$; $Y\zeta = \frac{1}{3} YX$; $Y\gamma = \frac{1}{4} YX$, & per puncta α, ζ, γ, traductæ concipiantur *hyperbolæ* (habentes & ipſæ *aſymptotos* DA, AR) $\alpha\lambda$, $\zeta\mu$, $\gamma\nu$; erunt hæ ipſarum curvarum CLL, AMM, ANN *aſymptoti*. (Similes etiam *aſymptoti* conveniunt lineis poſthac deſcribendis, quanquam de illis conticeamus.)

6. Hinc in ſecundo gradu $a + \frac{cc}{2a} \sqsubset n$; in tertio $a + \frac{cc}{3a} \sqsubset n$;

in

in quarto $a + \frac{cc}{4a} \sqsubset n$; quæ tamen inæqualitas eo minor eſt, quò AE (vel n) major exiſtit.

$$a + \frac{cc}{a} = n.$$
$$a + \frac{cc}{a} = \frac{nn}{a}.$$
$$a + \frac{cc}{a} = \frac{n^3}{aa}.$$
$$a + \frac{cc}{a} = \frac{n^4}{a^3}.$$

Poſſit hæc ſeries explicari juxta præcedentium modum ſecundum, & eaſdem adhibendo curvas LXL, MXM, NXN; quarum nimirum proprietas eſt, ut rectâ GK ductâ ad AH utcunque perpendicularis, ſit $GL = \frac{nn}{AG}$; & $GM = \frac{n^3}{AGq}$; & $GN = \frac{n^4}{AG\,cub.}$ Fig. 212.

Nam ſi fiat angulus HAR ſemirectus, & utcunque ducatur GEO ad AH perpendicularis; & ſit GE. c :: c. EO; & per O intra aſymptotos AD, AR deſcribatur *hyperbola* OO; hujuſce cum expoſitis lineis LXL, MXM, NXN interſectiones, radices a reſpectivas determinabunt; ductis utique LG, MG, NG ad AH perpendicularibus; erunt interceptæ AG ipſis a æquales reſpectivè.

Poſſint conſimili modo ſubſequentes omnes æquationes explicari; ſed eas modo duntaxat priore dabimus expoſitas.

Series quinta.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{cc}{a} - a = n. \\ cc - aa = nn. \\ cca - a^3 = n^3. \\ ccaa - a^4 = n^4. \end{array}\right\}$$ Fig. 213.

Series ſexta.

$$\left.\begin{array}{l} a - \frac{cc}{a} = n. \\ aa - cc = nn. \\ a^3 - cca = n^3. \\ a^4 - ccaa = n^4. \end{array}\right\}$$

Fig. 213. Fiat angulus RAI ſemirectus, & AD ad AI perpendicularis; in qua AC = c; tum utcunque ductâ GZ ad AD parallelâ, ſit AG (vel GZ). AC :: AC . ZK, & per K, intra angulum DAR deſcribatur *hyperbola* KYK; tum ſint curvæ CLYHLλ, AMYHMμ, ANYHNν tales, ut inter AG (vel GZ) & GK ſit *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ propoſito deſervient.

Conſtat hoc, ut in præcedente; & quo pacto radices reſpectivè determinantur. Verùm adnotetur præterea.

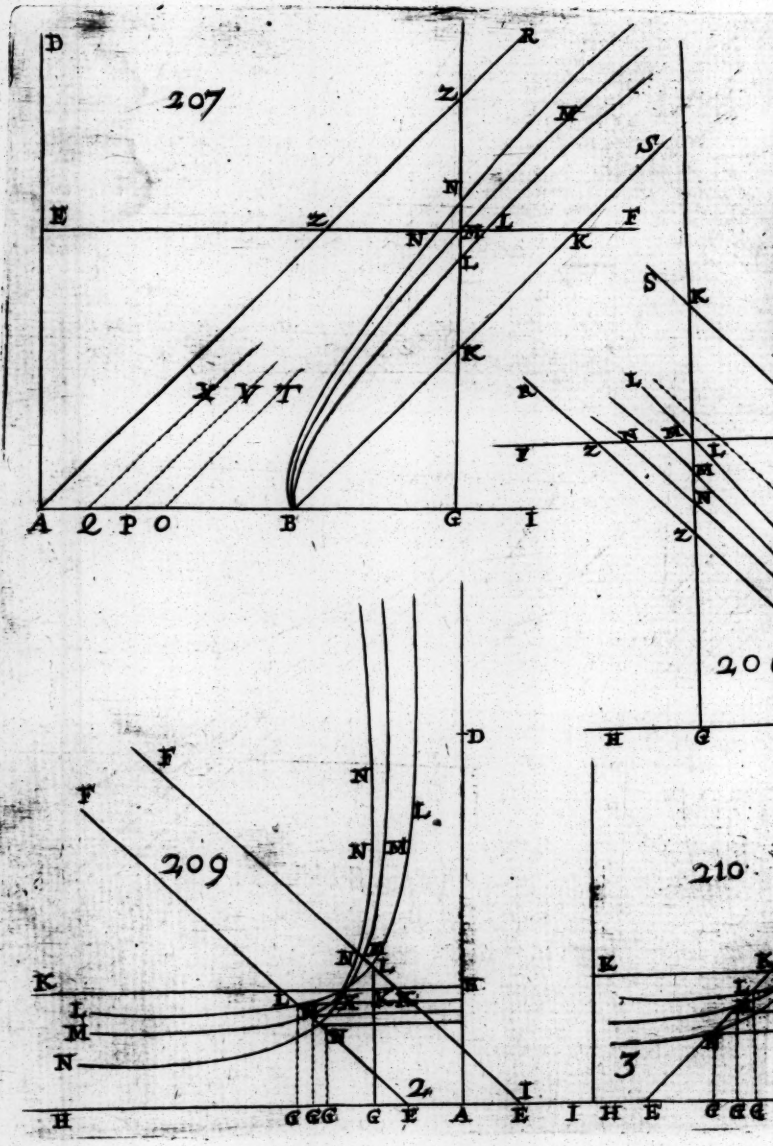
Not.

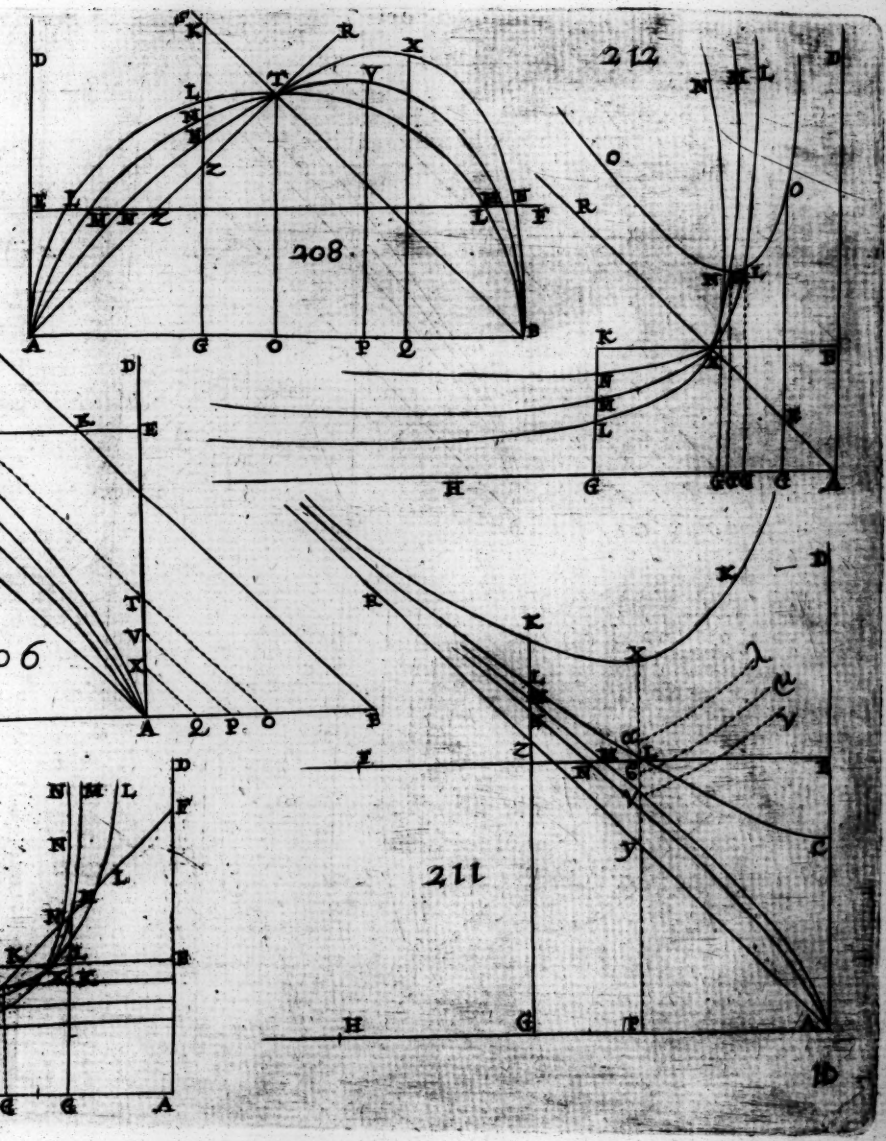
1. Curvæ CLH, AMH, ANH ad quintam ſeriem pertinent; reliquæ HLλ, HMμ, HNν ad ſextam.

2. Quoad curvas ad quintam ſeriem pertinentes; ſi A$\varphi = \sqrt{\frac{ACq}{2}}$; & ordinetur φY; erit Y communis linearum interſectio, ſeu *nodus*.

3. In harum primo gradu ordinata AK eſt infinita, in ſecundo AC eſt maxima; in tertio ſi fuerit AP = $\sqrt{\frac{ACq}{3}}$, & ordinetur PV, erit PV maxima (unde radicum una ſemper major eſt quam $\sqrt{\frac{ACq}{3}}$ altera minor) in quarto ſi AQ = $\sqrt{\frac{ACq}{4}} = \frac{AC}{2}$, & ordinetur QX, erit QX maxima (unde radicum una major erit, altera minor ipsâ $\frac{AC}{2}$).

4. Con-


207
X V T
209
210
2
3


208
212
211
206

4. Consequenter in harum secundo gradu si $n \sqsubset c$; in tertio, si $n^3 \sqsubset cc\sqrt{\frac{cc}{3}} - \frac{cc}{3}\sqrt{\frac{cc}{3}} = \frac{2}{3}cc\sqrt{\frac{cc}{3}}$; vel $n^6 \sqsubset \frac{4}{27}c^6$; in quarto si $n^4 \sqsubset \frac{c^4}{4} - \frac{c^4}{16} = \frac{1}{16}c^4$; nulla radix habetur; unam in iis casibus recta EF curvas supergreditur; nec iis occurrit.

5. Itidem in his omnibus maxima possibilis radix est AH = AC.

6. Curva CYH est *Circuli quadrans*, reliquæ AMH, ANH quodammodo κυκλοειδεῖς.

7. Ad sextam seriem pertinentium curva HLL est *hyperbola aequilatera*, cujus axis AH; reliquæ sunt *Hyperboliformes*. Unde quoad hanc seriem liquent cætera.

Series septima.

$$a + b + \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa + ba + cc = nn.$$
$$a^3 + baa + cca = n^3.$$
$$a^4 + ba^3 + cca\,a = n^4, \&c.$$

In recta BAH indefinitè protensâ capiatur AB = b; & in AD ad BH perpendiculari sit AC = c; sint etiam anguli HAR, HBS Semirecti; tum arbitrariè ductâ GY ad AH perpendiculari quæ ipsam BS secet in Y; fiat AG. AC :: AC. YK; & per K intra angulum DVS describatur *hyperbola* KKK; sint demum curvæ CLL, AMM, ANN tales, ut inter AG (vel GZ) & GK sit *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ satisfacient negotio. Nam est GK = $a + b + \frac{cc}{a}$; & GL q = $aa + ba + cc$; & GM cub = $a^3 + baa + cca$; & GN qq = $a^4 + ba^3 + ccaa$. Fig. 214.

Not.

1. Secundi gradûs curva CLL est pars *hyperbola aquilatera*, cujus *centrum* O, ipsam AB bisecans; & siquidem AC $\sqsubset$ AO, est OH (ad AB perpendicularis, &) = $\sqrt{\text{AC q} - \text{AO q}}$ ejus *semiaxis*; sin AC $\sqsupset$ AO, ejus axis est OI = $\sqrt{\text{AO q} - \text{AC q}}$. reliquæ verò curvæ AMM, ANN sunt *hyperboliformes*.

2. Hinc constat in secundo gradu si fuerit $n = C$, nullam veram radicem dari; alioquin in omnibus una semper habetur, & unica; quoniam recta E F curvas semel intersecabit, nec pluries.

Series octava.

Fig. 215.

$$\frac{cc}{a} + b - a = n.$$
$$cc + ba - aa = nn.$$
$$cca + baa - a^3 = n^3.$$
$$ccaa + ba^3 - a^4 = n^4, \&c.$$

Series nona.

$$a - b - \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa - ba - cc = nn.$$
$$a^3 - baa - cca = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 - ccaa = n^4, \&c.$$

Fig. 215. In recta A I sumatur A B $= b$; & in A D ad ipsam A I perpendiculari sit A C $= c$; fiant autem anguli I A R, A B S semirecti; ducatúrque recta Z G K ad A I utcunque perpendicularis, ipsam B S secans ad ξ; & sit A G. A C :: A C. ξ K; tum per K intra angulum D S B describatur *hyperbola* K Y H K; sint denuò curvæ C L H λ, A M H M μ, A N H N ν tales, ut inter A G, G K sint *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N; hæ curvæ propositio satisfacient; constat autem hoc ut in præcedente.

Not.

1. Curvæ C L H, A M H, A N H ad octavam seriem pertinent, reliquæ verò H L λ, H M μ, H N ν, ad nonam.

2. Quoad octavam seriem, si bisecetur A B in O, & ordinetur O T ad curvam C L H est O T maxima; sin fiat A P $= \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} +$

$\frac{cc}{3}$, ac ordinetur P V ad curvam A M H, erit P V maxima; item si A Q $= \frac{1}{8}b + \sqrt{\frac{1}{64}bb + \frac{cc}{2}}$, & ordinetur Q X ad curvam A N H erit Q X maxima.

3. Hinc, si in secundo harum gradu sit $n \sqsubset \sqrt{cc + \frac{bb}{4}}$; in tertio si (posito fore $f = \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} + \frac{cc}{3}}$) sit $n^3 \sqsubset ccf + bff - f^3$; in quarto, si (posito fore $g = \frac{1}{8}b + \sqrt{\frac{1}{64}bb + \frac{cc}{2}}$) sit $n^4 \sqsubset ccgg + bg^3 - g^4$; nulla datur radix; nam his suppositis, recta E F curvis non occurret, respectivè.

4. Si fuerit A $\varphi = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}}$, & ordinetur φ Y; erit Y *Nodus* curvarum; unde si $u = A\varphi$; erit A φ una radicum in omnibus.

5. Curva C L H est *circumferentia Circuli*, cujus *Centrum* O; reliquæ A M H, A N H sunt *Cycliformes*.

6. Peculiare est in secundo gradu, quòd si $n \sqsupset c$, detur una tantùm radix.

7. In hac radicum maxima (quæ & minima est in nona serie) est A H $= \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} + cc}$.

8. Curva H L λ est *hyperbola æquilatera*, cujus *semiaxis* O H; reliquæ H M μ, H N ν sunt *hyperboliformes*; unde patet in serie nona semper unam, & hanc unicam radicem haberi.

Series decima.

Fig. 216.

$a + b - \frac{cc}{a} = n.$

$aa + ba - cc = nn.$

$a^3 + baa - cca = n^3.$

$a^4 + ba^3 - ccaa = n^4$, &c.

Series

Series undecima.

$$\frac{cc}{a} - b - a = n.$$
$$cc - ba - aa = nn.$$
$$cca - baa - a^3 = n^3.$$
$$ccaa - ba^3 - a^4 = n^4, \text{ &c.}$$

Fig. 216. In recta BAH sumatur BA = b; & in AD ad AH perpendiculari sit AC = c; sintque anguli HAR, HBS semirecti; tum utcunque ductâ rectâ GK ξ ad AH perpendiculari (quæ ipsam BS secet in ξ; sit AG. AC :: AC. ξK; & per K intra *asymptotos* VD, VS describatur *hyperbola* KYHK; sint demum curvæ CLHLκ, AMHMμ, ANHNν tales, ut inter AG (vel GZ) & GK sint *media* GL; *bimedia* GM; *trimedia* GN; hæ propositio servient, id quod constat, ut in præcedentibus.

Not.

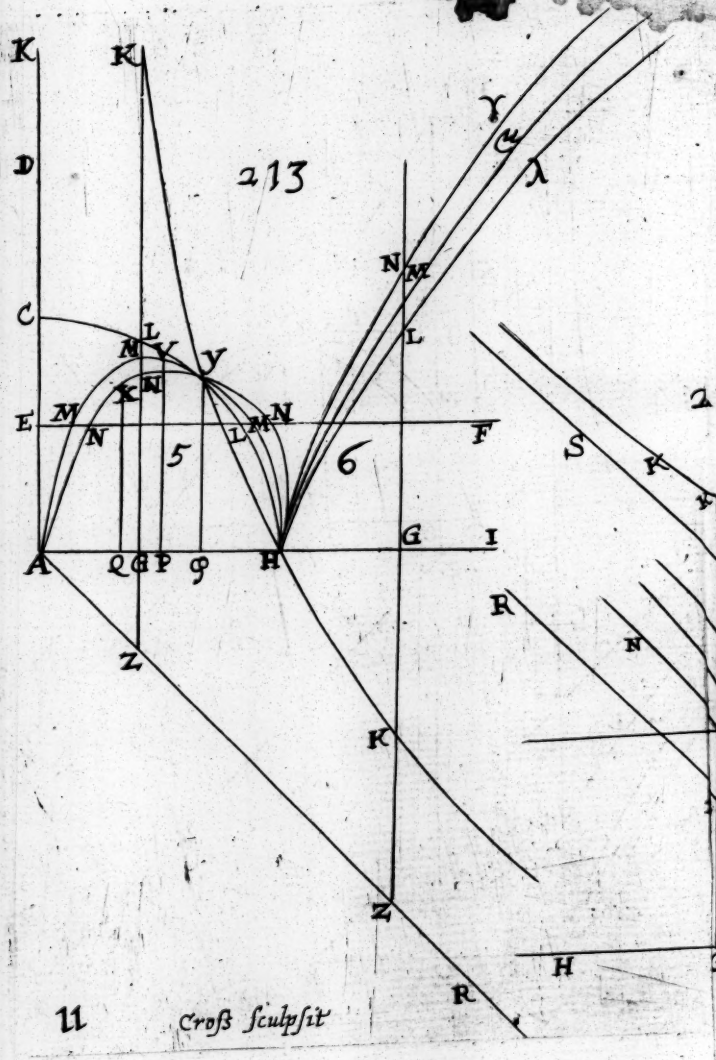
1. Curvæ HLλ, HMμ, HNν ad decimam seriem pertinent; reliquæ CLH, AMH, ANH ad undecimam.

2. Curva HLλ est *hyperbola æquilatera*, & curva CLH *circularis circumferentiæ* pars; utriusque commune centrum est O, ipsam AB bisecans (unde $AH = \sqrt{\frac{bb}{4} + cc} : -\frac{b}{2}$)

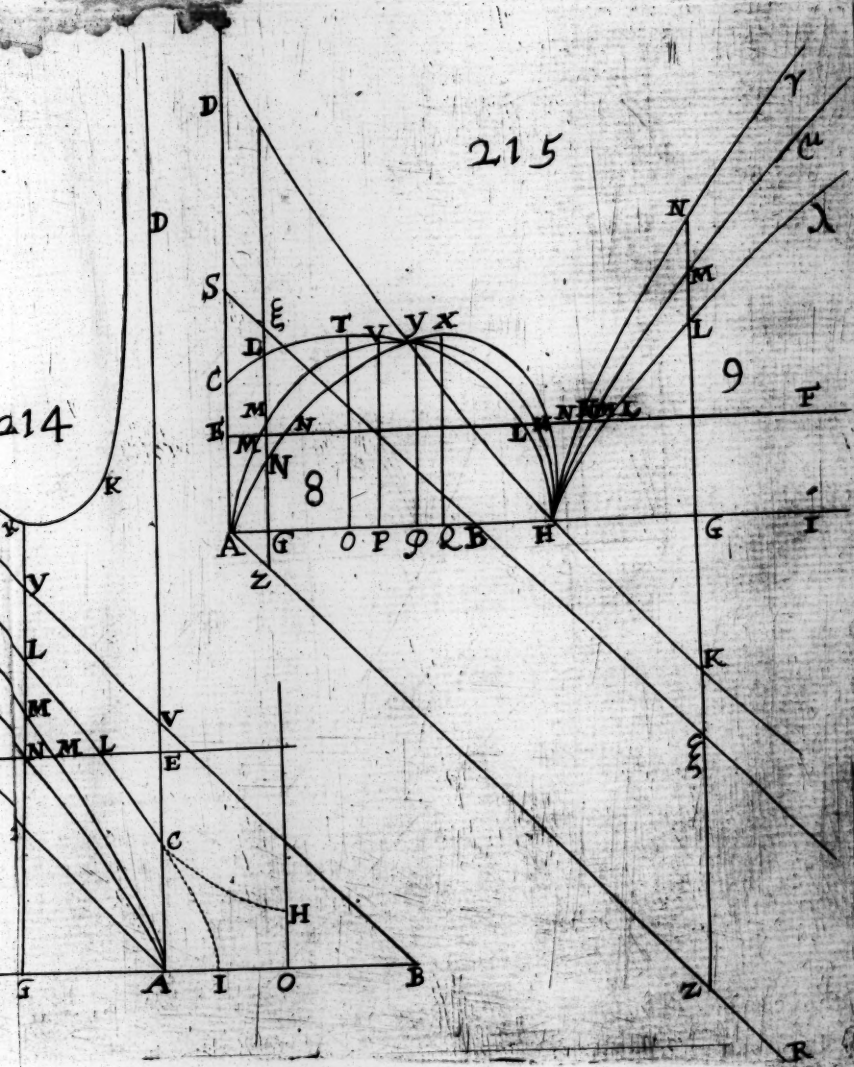
3. In decima serie radix una semper habetur, & unica; in undecima nunc duæ, nunc una, subinde nulla.

4. $A\phi = \frac{cc}{b}$; & $A\downarrow = \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}} : -\frac{b}{4}$; & ordinentur φY, ↓X; puncta Y, X sunt nodi curvarum.

5. In undecimæ secundo gradu ordinata AC est maxima; sin $AP = \sqrt{\frac{bb}{9} + \frac{cc}{3}} : -\frac{b}{3}$; & à P ad curvam AMH ordinetur Pγ, hæc maxima erit; item si $AQ = \sqrt{\frac{9bb}{64} + \frac{cc}{2}} : -\frac{3b}{8}$; & à



11 Cross sculpsit


214
215
8
9
D
S
C
E
M
N
K
L
V
A
G
O
P
Q
B
H
I
F
Z
R
T
X
Y
ξ
γ
μ
λ

Q ad curvam A N H ordinetur Q ϑ, hæc etiam maxima erit; unde de radicum limitibus fiet judicium; ut in iis, quæ ad seriem octavam sunt adnotata.

Series duodecima.

Fig. 217.

$$a - b + \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa - ba + cc = nn.$$
$$a^3 - baa + cca = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 + ccaa = n^4, \text{ &c.}$$

Series decima tertia.

$$b - a - \frac{cc}{a} = n.$$
$$ba - aa - cc = nn.$$
$$baa - a^3 - cca = n^3.$$
$$ba^3 - a^4 - ccaa = n^4, \text{ &c.}$$

Pro his, Sit A B = *b*; & A C = *c*; & angulus A B S semirectus, & G ξ ad A B utcunque perpendicularis, & A G . A C :: AG. ξ K; & K H K I K *hyperbola asymptotis* S A, S B descripta; denuò curvæ C L H L I λ, A M H M I μ, A N H N I ν tales sint, ut inter A G, G K sit *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N. Fig. 217.

Not.

1. Curvæ C L H, A M H, A N H, atque curvæ I L λ, I M μ, I N ν ad seriem duodecimam spectant, verùm intermediæ curvæ H L I, H M I, H N I ad decimam tertiam.

2. Curvæ C L H, I L λ sunt *hyperbolæ æquilateræ*, quarum commune *centrum* O (rectam A B bisecans) & *semiaxis* O H (vel O I) = √ A O q. — A C q reliquæ tales sunt, quales figura monstrat.

3. Curvæ

3. Curva HLLI est *semicirculus*; reliquas itidem ostentat Schema.

4. Si $A\zeta = \frac{cc}{b}$; $A\downarrow = \frac{b}{4} - \sqrt{\frac{bb}{16} - \frac{cc}{2}}$; & $A\varphi = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} - \frac{cc}{2}}$; ordinentúrque rectæ ζV, $\downarrow X$, φY; erunt puncta V, X, Y *nodi* curvarum (si $b = \sqrt{8cc}$, decerunt *nodi* X, Y; si $b = \sqrt{8cc}$; ii coalescent).

5. Ordinatarum ad curvam CLH *maxima* est ipsa AC; sin $AP = \frac{b}{3} - \sqrt{\frac{bb}{9} - \frac{cc}{3}}$, & ordinetur $P\gamma$ ad curvam AMH; erit $P\gamma$ *maxima*; item si $AQ = \frac{1}{8}b - \sqrt{\frac{1}{64}bb - \frac{cc}{2}}$; & ordinetur $Q\delta$ ad curvam ANH, erit $Q\delta$ *maxima*.

6. Ordinatarum ad curvam HLLI *maxima* est ipsa OT; sin $AP = \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} - \frac{cc}{3}}$, & ad curvam HMI ordinetur pg, erit pg *maxima*; item si $Aq = \frac{1}{8}b + \sqrt{\frac{1}{64}bb - \frac{cc}{2}}$; & ordinetur qd ad curvam HNI, erit qd *maxima*.

7. Hinc radicum limites dignoscentur, ut innuitur in iis, quæ ad octavam seriem animadversa sunt.

8. Patet in Serie duodecima nunc tres, modo duas, semper unam radicem haberi; in decima tertia verò subinde duas, aliquando tantùm unam, interdum nullam haberi.

9. Et hæc quidem constant posito fore $\frac{b}{2} \sqsubset c$; at si $\frac{b}{2} = c$; evanescet Series decima tertia; coalescent puncta H, O, I; recta AB *hyperbolam* KKK tanget; curvæque CLH, ILλ in rectas lineas degenerabunt.

10. Sin $\frac{b}{2} \sqsupset c$; etiam evanescit Series decima tertia; *hyperbola* KKK tota infra rectam AB jacente; quo casu curva CLL erit hyperbola æquilatera, habens centrum O, semiaxem (ipsi AB perpendicularem) $OT = \sqrt{ACq - AOq}$; tunc & curvæ AMM, ANN ad infinitum procurrent, sic ut æquationes, quæ in Serie duodecima, unam semper, & unicam radicem obtineant. Hæc sufficerit insinuâsse; quin & rem totam hactenus particulatim attigisse. Subnectemus autem notas quasdam magis generales. Fig. 218.

In

In *præmissas explicationes* animadvertatur generatim.

1. Propositam quamvis æquationem explicans *curva* designatur hoc modo: proponatur, exempli causâ, *æquatio* $a^5 + ba^4 + cca^3 - d^3aa - f^4a = n^5$; In recta indefinitè protensa HI designetur punctum A, pro radicum termino, vel origine; tum arbitrariè sumptâ AG pro indeterminatâ radice a; fiat GK æqualis primo seriei propositam æquationem continentis gradu; nempe sit hîc $GK = a + b + \frac{cc}{a} - \frac{d^3}{aa} - \frac{f^4}{a^3}$ (utique rationem a ad c semel continuando fit $\frac{cc}{a}$; rationem a ad d bis continuando fit $\frac{d^3}{aa}$; ac ità porrò) tum inter AG, GK tot mediarum proportionalium, quot æquationis propositæ gradus exigit (is autem à pura quæsitæ radicis potestate indicatur) in hoc nempe casu quatuor mediarum proportionalium prima sit GO; per ejusmodi puncta O traducta curva AOO proposito deserviet. Fig. 219.

2. De radicibus falsis, seu negativis nihil attigimus suprà; cæterùm eæ reperiuntur hoc modo. Æquationi propositæ subrogetur altera, cujus in locis paribus (etiam vacuos locos adnumerando) signa sunt illis contraria, quæ habet æquatio proposita; erunt hujusce *subditiciæ æquationis* radices veræ, seu positivæ ipsius propositæ æquationis radices falsæ, seu negativæ. *Exemplo* sit *æquatio* $a^3 + baa = n^3$; vel $a^3 + baa^* - n^3 = 0$. Subrogetur $a^3 - baa^* + n^3 = 0$; & hujus, † utì suprà edoctum, veræ radices designentur, hæ *propositæ æquationis* falsæ erunt. Rursus sit $a^3 - baa = n^3$; vel $a^3 - baa - n^3 = 0$; substituatur æquatio $a^3 + baa + n^3 = 0$; hæc nullam veram radicem obtinet; ergo nec *æquatio proposita* falsam admittit. † *In Serie 3.*

3. Quinimò datâ verâ radice quâpiam, depressioris gradûs æquatio quædam alsis reperiendis inserviet, qualis ità determinatur. Proponatur æquatio quævis, puta $a^3 + baa = n^3$; cujus nota sit radix una, quæ vocetur f. Constituatur æquatio planè similis propositæ, eâsdemque *coefficientes* habens, tantum pro a substituendo f; nempe $f^3 + bff = n^3$. ergò $a^3 + baa - n^3 = f^3 + bff$; adeóque $a^3 + baa - f^3 - bff = 0$. dividatur hæc æquatio (id quod semper fieri potest) per $a - f$; proveniet $aa \begin{matrix} + ba \\ + fa \end{matrix} \begin{matrix} + bf \\ + ff \end{matrix} = 0$; cujus æquationes eædem erunt cum reliquis æquationis propositæ radicibus; quæ proinde duas colligitur radices falsas habere; itaque mutatis locorum parium signis, ut ità fiat $aa \begin{matrix} - ba \\ - fa \end{matrix} \begin{matrix} + bf \\ + ff \end{matrix} = 0$; hujus æquationis

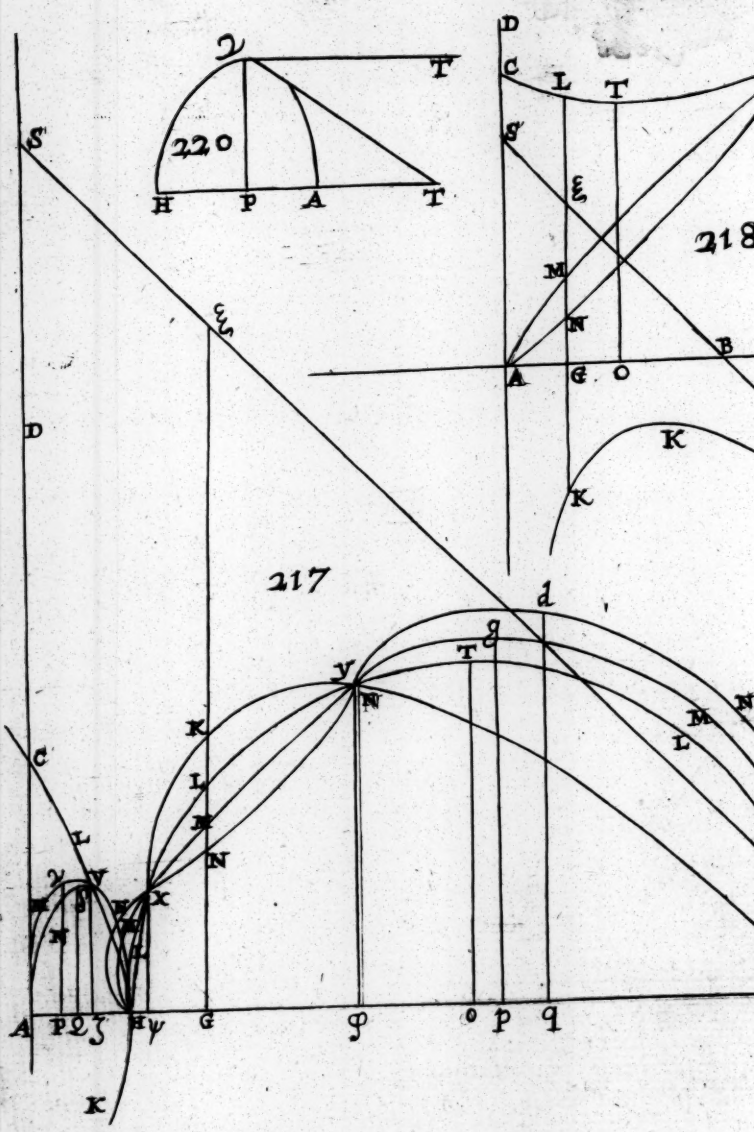
veræ radices propoſitæ falſas exhibent. Hic inſuper modus æquationis propoſitæ, quatenus illa ex aliarum in ſe ductu provenit, conſtitutionem oſtendit.

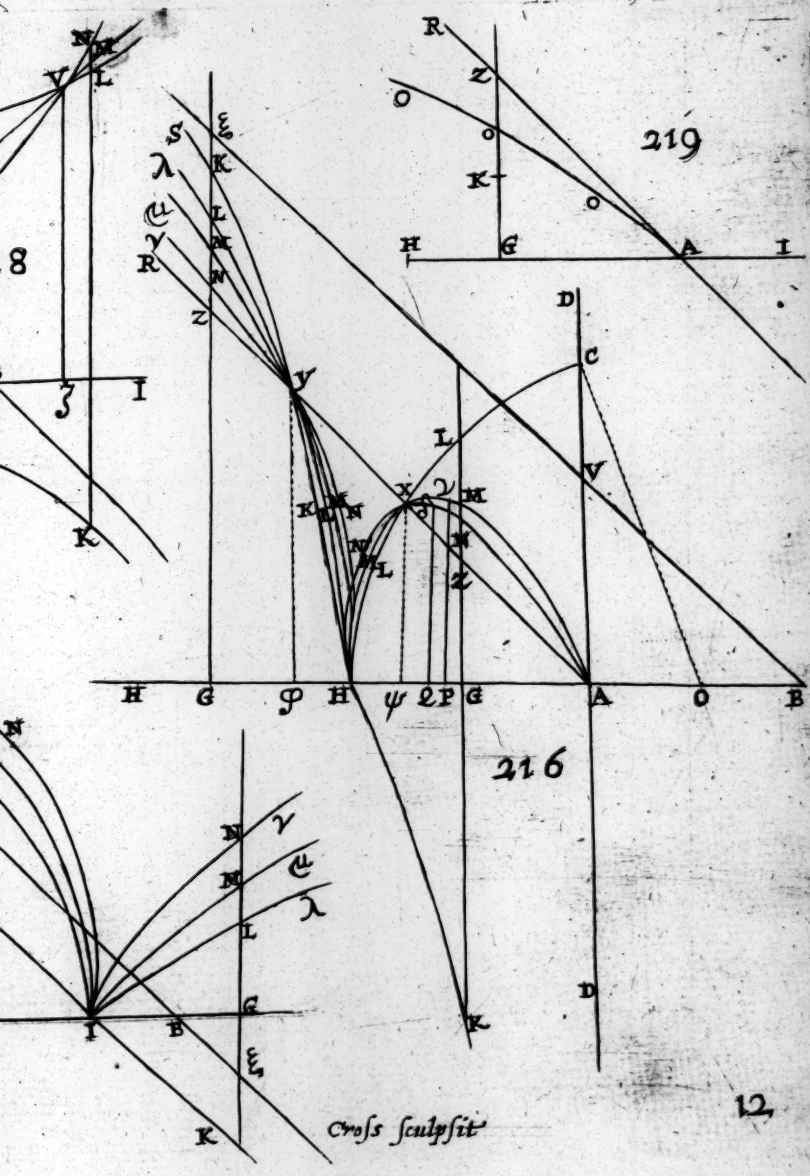
4. Radices maximæ & minimæ deprehenduntur in quacunque ſerie ponendo (quovis in gradu ſeriei) fore $n=0$; ut in octava ſerie ſit $ba-aa+cc=0$; adeóque $cc=aa-ba$, erit $a\left(=\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}}+cc\right)$ *maxima radix*; item in Serie duodecima ſit $aa-ba+cc=0$; unde $cc=ba-aa$; erit $a\left(=\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{bb}{4}}-cc\right)$ *radix maxima*; & $a\left(=\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{bb}{4}}-cc\right)$ *radix minima.*

5. *Curvarum nodi*, vel *interſectiones* innoteſcunt, cujuſvis in Seriei quovis gradu, ponendo fore $a=n$; ut in octava Serie, ubi $ba-aa+cc=nn$, ſit $a=n$; ergò $ba-aa+cc=aa$; vel $cc=2aa-ba$; vel $\frac{cc}{2}=aa-\frac{ba}{2}$; quare $a=\frac{b}{4}+\sqrt{\frac{bb}{16}+\frac{cc}{2}}$. Item in Serie duodecima, ubi $aa-ba+cc=nn=aa$; erit ideò $cc=ba$; ac inde $a=\frac{cc}{b}$.

6. *Ordinatæ maximæ, minimæque* variis nodis, methodiſque paſſim notis inveſtigantur; ego ſimul illas atque curvarum *tangentes* unà operâ ſic determino. Sit curva A γ H, ad Seriem undecimam pertinens, ejúſque gradum, cujus æquatio eſt $cca-baa-a^3=n^3$; poſito γ T curvam tangere, & γ P ad A H ordinari, reperio (de ſupra monſtratis) fore $PT=\frac{3n^3}{3aa+2ba-cc}$, tum conſidero, ſi ordinata P γ ſit maxima, fore tangentem ipſi H A parallelam, ſeu rectam P T eſſe infinitam; quare cùm ſit $n^3=PT\times:3aa+2ba-cc$; & n ſit finita, patet eſſe $3aa+2ba-cc=0$; vel $aa+\frac{2}{3}ba=\frac{cc}{3}$; adeóque $\surd:\frac{bb}{9}+\frac{cc}{3}:-\frac{b}{3}=a=AP$. Fig. 220.

7. Adnoto demùm è *maximis* & *minimis ordinatis* radicum limites derivari; nempe ſi reperiatur ad maximam ordinatam pertinentis radicis (velut ipſius A P in exemplo proximè ſuperiori) valor, & is ubique in æquatione pro ipsâ a ſubſtituatur, ſi quod provenit, deficiat ab *homogeneo* (quod vocant) *comparationis*, *problema* conſtrui nequit


220
H
P
A
T
217
218
S
D
C
L
M
N
K
A
G
O
B
d
g
y
X
V
p
q
φ
ψ
ζ
ξ


219
216
Cross sculpsit
12.

nequit, aut ſaltem radicibus aliquot caret, quas æquationis gradus & ſpecies præ ſe ferunt. Eadem *minimarum* eſt ratio; tantùm ibi proveniens *ſumma* debet *homogeneum* illud excedere, quò radix aliqua, vel omnes habeantur. *Exempla* comparent in præmiſſis. Hîc itaque ſubſiſto.

Laus DEO Optimo Maximo.

FINIS.

ERRATA.

Pag. 5. *Lin.* 20. ad teſtatur, *lege* teſtatam facit. *p.* 9. *l.* 3. *leg.* velocitatum. *p.* 14. *l.* 36. *leg.* plana. *p.* 17. *l.* 24. *leg.* prohibetur. *p.* 18. *l.* 32. *leg* à puncto B. *p.* 19. *l.* 4. *leg.* B D, G K. *p.* 22. *l.* 10. *leg.* VD multitudo cenſeri. *p.* 23. *l.* 7. *leg.* radius ad. *p.* 23. *l.* 10. *leg.* nec non, datis. *p.* 24. *l.* 2. *leg.* effectæ. *p.* 24. *l.* 24. *leg.* quidem ut punctum. *p.* 30. *l.* 18. *leg.* protracta. *p.* 32. *l.* 5, 6. *leg.* tangentes (una — hujus) *p.* 35. *l.* 5. *leg.* tangant. *p.* 35. *l.* 6. *leg.* M P. *p.* 35. *l.* 12. *leg.* T P. *p.* 37. *l.* 2. *leg.* diviſâ. *p.* 40. *l.* 4. *leg* arcus N H major eſt ipſâ. *p.* 41. *l.* 32. *leg.* verſari. *p.* 43. *l.* 15. *leg.* aliam H R. *p.* 47. *l.* 26. Fig. 39, & 40. *pag.* 49. *l.* 16. *leg.* $2fxy$. *p.* 52. *l.* 3. *dele* Fig. 51, 52. *p.* 52. *l.* 6. *leg.* Fig. 51, 52. *pag.* 52 *l.* 24. *leg.* Fig. 53. *p.* 55. *l.* 15. *dele* ſe interſecantes in X. *p.* 57. *l.* 25. *leg.* ∽ P. *p.* 58. *l.* 19. *leg.* F B F ipſi K E K. *p.* 59. *l.* 2. *leg.* K E K. *p.* 61. *l.* 26. *leg.* punctum. *p.* 62 *l.* 27. *leg.* K O ⊏ K A. *p.* 63. *l.* 16. *leg.* contactum. *p.* 64. *l.* 22. *leg.* Fig. 80. *p.* 65. *l.* 4. *leg.* συνολεχίαν. *p.* 67. *l.* 11. *leg* tum alia. *p.* 67. *l.* 35. *leg.* Q O q = Z q. *p.* 68. *l.* 7. *leg.* F Q. *p.* 70. *l.* 22. *leg.* Fig. 95. *p.* 76. *l.* 3. *leg.* H T (*a*) ⊏ G A. *p.* 76. *l.* 11. *leg.* D F. *p.* 76. *l.* 18. *leg.* P K. *p.* 76. *l.* 20. *leg.* tanget recta R F K. *p.* 78. *l.* 24. *leg.* infra. *p* 79. *l.* 1. *dele* Fig. 113. *p.* 79. *l.* 31. *leg.* Fig. 113. *p.* 86. *l.* 31. *leg.* $\sqrt{\text{V C Z}} \varphi = \text{C G}$. *p.* 87 *l.* 14. *leg* $\text{D} \downarrow = \sqrt{\frac{12}{243}}$. *pag.* 91. *l.* 9. *leg.* in recta. *p.* 91. *l.* 23. *leg.* æquale rectangulo ex. *p.* 91. *l.* 24. *leg.* P, Q. *p.* 96. *l.* 15. *leg.* C A. C D. *p.* 96 *l.* 22. *leg.* $\text{A D} = \frac{5}{t}\text{C A}$. *p.* 97. *l.* 2. *leg.* totam. *p.* 102. *l.* 25. *leg.* O P ad O T. *pag.* 106. *l.* 10. *leg.* applicatis, *p.* 106. *l.* 19. *leg.* ſemi-axis. *p.* 112. *l.* 2. *leg.* applicatis *p.* 114. *l.* 22. *leg.* $\frac{\text{PLQO}}{2\ \text{Rad.}}$ *p.* 114. *l.* 26. *leg.* propoſitum *p.* 116. *l.* 5. *leg.* R. S. *p.* 122. *l.* 22. *leg.* Fig. 183. *p.* 123. *l.* 1. *leg.* Fig. 184 *p.* 125. *l.* 4. *leg.* D M = D I. *p.* 128. *l.* 7. *leg.* Fig. 195. *p.* 128. *l.* 11. *dele* Fig. 195. *p.* 128. *l.* 23 $\frac{\text{PM}}{\sqrt{\text{APM}}}$ *p.* 129. *l.* 13. emerget undecima Lect. *p.* 136. *l.* 20. *leg.* hyperbolæ. *pag.* 139. *l.* 3. *leg.* nam. *p.* 140. *l.* 1. *leg.* n — 6. à *p.* 105. ad *p.* 112. *l* 1. *leg.* Lect. XII.

UBi (*pag.* 100) de Centro gravitatis parabolæ & paraboliformis verba fiunt, intelligantur non curvæ lineæ, ſed iis comprehenſa ſpatia, de quibus apparet iſthic agi.

Sicubi ponitur $\frac{\delta}{\varpi}$, nec adponitur ἔκθεσις ulla, deſignantur termini rationem exprimentes, quam habet circuli diameter ad ejus circumferentiam.